Contents

Geometry and Topology . . . 2
A-10-109-1 . . . 3
A-10-1129-1 . . . 7
A-10-127-1 . . . 11
A-10-1299-1 . . . 14
A-10-130-1 . . . 17
A-10-152-1 . . . 21
A-10-303-1 . . . 25
A-10-339-1 . . . 27
A-10-393-2 . . . 30
A-10-509-1 . . . 33
A-10-601-1 . . . 35
A-10-814-1 . . . 39
A-10-874-3 . . . 43
A-10-950-1 . . . 47
A-10-958-1 . . . 51
A-10-998-1 . . . 55

چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

هندسه و توپولوژی

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

توپولوژی یک گروه لی نیم ساده، اساسا منحصر بفرد است

نادر کوهستانی، استادیار دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان وبلوچستان، $kouhestani@math.usb.ac.ir$

بتول مقدم فرد* دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان وبلوچستان، $b.moghaddamfard@gmail.com$

چکیده: دراین متن، ما توپولوژی‌های گروههای موضعا فشرده را روی گروههای لی ساده ونیم ساده مطالعه می‌کنیم ونشان می دهیم که توپولوژی گروه لی، درگروهی مانند S بسیار سخت است؛یعنی هر یکریختی مجرد میان Sو یک گروه σ-فشرده وموضعا فشرده بطور خودکار با شرط اینکه S بطور مطلق ساده باشد،یک همسان‌ریختی است.

کلمات کلیدی: گروه لی، جبرلی، گروه موضعا فشرده، همریختی های پیوسته

مقدمه

یکریختی های مجرد میان گروههای‌لی، بوسیله‌ی چندین نویسنده مورد مطالعه قرار گرفته است. به طور مشخص کارتان (2) و وندرواردن (7) اثبات کرده‌اند که یکریختی مجرد میان گروههای‌لی نیم‌ساده، بطور خودکار پیوسته است؛ این‌مطلب بوسیله‌ی فرودنتال (3) به یکریختی‌های میان گروههای‌لی حقیقی ساده‌مطلق تعمیم داده شده است. یکریختی‌های مجردمیان گروههای جبری‌ساده، بوسیله‌ی بورل و تیتس (9) مورد مطالعه قرار گرفته و تمام این مراحل بسختی به‌کلاسی از گروههای‌لی گسترش یافته‌است. دراین مقاله، یکریختی‌های مجرد میان گروههای فشرده موضعی و گروههای‌لی ساده را بررسی کرده و می‌بینیم که، توسیع توپولوژی گروهی از یک گروه لی‌ساده منحصربفرد است. قراردادن برخی محدودیت ها روی توپولوژی ضروری است درنتیجه ما توپولوژی گسسته وهمچنین توپولوژی هایی که موضعا فشرده نیستند را درنظرنمی گیریم. یک نسخه‌ی ساده شده ازنتیجه‌ی اصلی را بشرح زیر بیان می کنیم.

تعریف

تعریف $1-1$. یک گروه لی ساده، گروه لی حقیقی همبند بدون مرکز S است، که جبرلی آن یعنی $s = Lie(S)$ ساده باشد.

تعریف$1-2$. اگر G وH دوگروه لی هموار باشند؛

۱. نگاشت $\varphi : G \longrightarrow H$ یک همریختی لی است، هرگاه φ هموار واز دیدگاه گروه، همریختی باشد و

۲. اگر φ، وابرسانی باشد آنگاه φ را یکریختی‌لی نامند.

تعریف$1-3$. هرگاه نگاشت $\varphi : S \longrightarrow S$ از گروه لی S یکریختی باشد، دراینصورت φ را خودریختی از S می نامند.

مجموعه‌ی تمام خودریختی ها روی S رابانماد $Aut(S)$ نمایش می دهند.

تعریف$1-4$. اگر s و η جبرهای‌لی باشند،$\psi : s \longrightarrow \eta$ یک همریختی جبرلی است هرگاه ψ خطی و حافظ کروشه‌ی لی باشد، یعنی برای هرد $s \ni X, Y$ ، $\psi([X,Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$ بعلاوه اگر ψیک به‌یک وپوشا باشد، در اینصورت یکریختی جبرلی است.

تعریف$1-5$. هرگاه نگاشت $\phi : s \longrightarrow s$ یکریختی میان

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

جبرهای لی باشد، دراینصورت ϕ یک خودریختی از s می باشد.

مجموعه‌ی خودریختی‌های جبر لی s، روی میدان K را با نماد $Aut_{\kappa}s$ نشان می دهیم.

تعریف $1-6$. یک فضای هاسدورف σ-فشرده است، هرگاه اجتماع شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های فشرده باشد.

تعریف $1-7$. زیرمجموعه‌ی A ازیک فضای توپولوژیکی را بطور نسبی فشرده گویند هرگاه بستار A فشرده باشد.

تعریف $1-8$. یک فضای توپولوژی هاسدورف موضعافشرده است، هرگاه هرنقطه‌ی آن یک همسایگی بطورنسبی فشرده داشته باشد.

تذکر $1-9$.تمام گروههای توپولوژیکی هاسدورف فرض شده اند.

بخش دو

قضیه $2-1$. فرض کنید S گروه لی حقیقی بطورمطلق ساده باشد.بنابراین توپولوژی گروه‌لی،گروه توپولوژی σ-فشرده وموضعا فشرده ی یکتا روی S است.

لم $2-2$. یک گروه‌لی ساده بعنوان یک گروه مجرد، ساده است.

لم $2-3$. هرگروه‌لی ناگسسته که بعنوان یک گروه ساده باشد،گروه لی ساده است.

گزاره$2-4$.گروه‌لی S باجبرلی متناظر آن یعنی s بطورمطلق ساده است اگر، C $s\bigotimes_{\Re}C$ (عدد مختلط C) یک جبرلی ساده مختلط باشد.

لم$2-5$. هر فضای σ-فشرده، موضعا فشرده نیز می باشد.

لم$2-6$. ضرب متناهی از فضاهای σ-فشرده، σ-فشرده است.

گزاره$2-7$. اگر $f: X\longrightarrow Y$ نگاشت پیوسته میان فضاهای هاسدورف و X، σ-فشرده باشد بنابراین $f(x)$ نیز σ-فشرده است.

لم$2-8$. زیر فضای بسته از فضای σ -فشرده، σ-فشرده است.

قضیه$2-9$. (قضیه نگاشت باز)

فرض کنید $\psi: G\longrightarrow H$ همریختی پیوسته پوشا میان گروههای موضعا فشرده باشد. اگرH، σ-فشرده باشد بنابراین ψ، نگاشت باز است.

قضیه$2-10$.(پیوستگی خودکار)

فرض کنید G یک گروه موضعافشرده و H یک گروه σ-فشرده باشد، همچنین فرض کنید $\psi: G\longrightarrow H$ همریختی گروهی و نگاشت برل باشد:(تصویر معکوس هر مجموعه‌ی $H\subseteq U$ یک مجموعه‌ی برل است.) بنابراین ψ پیوسته است.

لم$2-11$. فرض کنید S یک گروه‌لی ساده m-بعدی و $G\subseteq AutLie(S)$ یک زیرگروه باز باشد؛ همچنین فرض کنید $C\subseteq G$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده شامل منحنی‌هموار غیرثابت باشد. بنابراین عناصر $g_0,g_1,...,g_m\in G$ وجود دارند که $g_0Cg_1Cg_2C...g_{r-1}Cg_m$ همسایگی فشرده ازهمانی است.

لم$2-12$. S را یک گروه‌لی‌ساده m-بعدی و $G\subseteq AutLie(S)$ را یک زیرگروه باز قراردهید. فرض کنید که $D\subseteq G$یک همسایگی فشرده ازهمانی وهمچنین $G\subseteq U$ یک همسایگی دلخواه از همانی باشند، بنابراین عناصر $a_1,a_2,...,a_m\in G$ وجوددارند بطوریکه $[a_1,D][a_2,D],...,[a_m,D]$ یک همسایگی از همانی و مشمول در U است.

قضیه$2-13$. Γ رایک گروه σ -فشرده و موضعافشرده و S راگروه لی‌ساده قراردهید. فرض کنید G زیر گروه باز از $AutLie(S)$ و نگاشت $\varphi: \Gamma\longrightarrow G$ همریختی گروهی پوشای مجرد باشد. همچنین فرض کنید که یک زیر مجموعه‌ی فشرده $C\subseteq G$ شامل منحنی هموار غیر ثابت وجوددارد بطوریکه $\varphi^{-1}(C)$، σ-فشرده است؛ دراین صورت φ پیوسته و باز است.

نتیجه$2-14$. فرض کنید S گروه‌لی ساده فشرده و $G\subseteq AutLie(S)$ باز باشد. Γ رایک گروه موضعا فشرده و σ-فشرده قراردهید و فرض کنید $\varphi: \Gamma\longrightarrow G$ همریختی

گروهی پوشای مجرد باشد، درنتیجه φ پیوسته وبازاست و بطورکلی $Aut(S) = AutLie(S)$ می باشد.

بخش ۳

لم3 − 1. فرض کنید s یک جبرلی حقیقی ساده از رتبه $rK_{\Re}(S) = 1$ و $s = \zeta \bigotimes \alpha \bigotimes n$ تجزیه ایواساوا باشد. قراردهید $m = Cen_{\zeta}(\alpha)$. اگر m آبلی باشد، بنابراین $s = sl_2(\Re)$ یا $s = su_{1,2}(C)$ است.

لم3−2. فرض کنید s یک جبر لی حقیقی ساده مجرد باشد، بنابراین زیرجبر سهمی$next-to-minimal$ وجود دارد بطوریکه جبر لوی نیم ساده با $sl_2(C)$، یکریخت نمی باشد.

قضیه3 − 3. فرض کنید S یک گروه لی‌ساده مجرد و $G \subseteq AutLie(S)$ بازاست. Γ را یک گروه σ-فشرده و موضعا فشرده قرار دهید و فرض کنید که نگاشت $\varphi : \Gamma \longrightarrow G$ یکریختی گروهی باشد، بنابراین φ یک همسانی است بطوریکه $Aut(S) = AutLie(S)$.

قضیه3 − 4. G را گروه فشرده موضعی قراردهید. اگر $G/Cen(G)$ فشرده باشد، بنابراین گروه جابجایی جبری DG از G، بستار فشرده دارد.

قضیه3 − 5. فرض کنید G گروه‌لی نیم ساده فشرده باشد. بنابراین G شامل جابجاگر، $G = \{[a,b] | a,b \in G\}$ است.

قضیه3 − 6. τ رایک توپولوژی هاسدورف موضعا فشرده ناگسسته روی مجموعه‌ی اعداد مختلط قراردهید. فرض کنید که برای هر $a \in C$ دونگاشت $z \longmapsto a+z$ و $z \longmapsto az$ در τ پیوسته اند (C مجموعه اعداد مختلط) درنتیجه میدان خودریختی $\alpha \in Aut(C)$ وجود دارد که $\alpha(\tau)$ توپولوژی استاندارد روی C است.

لم3 − 7. فرض کنید $S = PSL_2(C)$ و $s = sl_2(C)$ باشند. $G \subseteq Aut_Q(s)$ را یک زیرگروه شامل S قرارداده و نیز فرض کنید Γ یک گروه σ-فشرده وموضعا فشرده باشد. حال فرض کنید که $\varphi : \Gamma \longrightarrow G$ یکریختی گروهی باشد؛ بنابراین عنصر $\alpha \in Aut_Q(s)$ وجود دارد بطوریکه $C_\alpha \circ \varphi$ یک همسانریختی بتوی زیرگروه باز از $AutLie(S)$ است. بطور ویژه $Aut(S) = Aut_Q(s)$.

قضیه3 − 8. فرض کنید S یک گروه لی‌ساده مختلط با جبرلی s باشد. $G \subseteq Aut_Q(s)$ را یک زیرگروه شامل S و Γ را یک گروه موضعا فشرده و σ-فشرده قرار دهید. فرض کنید که $\varphi : \Gamma \longrightarrow G$ یکریختی گروهی باشد، بنابراین عنصر $\alpha \in Aut_Q(s)$ وجود دارند بطوریکه نگاشت ترکیب $c_\alpha \circ \varphi : \Gamma \longrightarrow Aut_Q(s)$ همسانریختی بتوی یک زیرگروه باز از $Aut_Q(s)$ است و درنتیجه $Aut(S) = Aut_Q(s)$.

قضیه3 − 9. فرض کنید S یک گروه‌لی نیم ساده همبند فاقد مرکز با جبرلی $s = Lie(S)$ باشد. $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ را نماد تجزیه به عوامل ساده درنظر بگیرید. $G \subseteq Aut(S)$ را یک زیرگروه شامل S قراردهید. فرض کنید که Γ یک گروه موضعا فشرده و σ-فشرده و نگاشت $\varphi : \Gamma \longrightarrow G$ یکریختی گروهی باشد. پس عناصر $\alpha_i \in Aut(S_i)$ وجود دارند که $\alpha = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ مزدوج ساز G به زیرگروه باز $G^\alpha \in AutLie(S)$ هستند، و نگاشت ترکیب $c_\alpha \circ \varphi : \Gamma \longrightarrow G^\alpha$ همسانریختی می باشد. اگر S_i ساده مطلق باشند، بنابراین ممکن است α_i ها همانی فرض شوند.

نتیجه3 − 10. اگر S و G مفروضات قضیه‌ی قبل باشند، فرض کنید که Λ یک گروه موضعا فشرده و σ-فشرده باشد، بطوریکه $\varphi : \Lambda \longrightarrow G$ همریختی پوشای مرکزی است. اگر $Cen(\Lambda)$ گسسته باشد (متناهی یا نامتناهی) بنابراین عناصر $\alpha_i \in Aut(S_i)$ وجود دارند که $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_n$ مزدوج ساز G به یک زیر گروه باز $G^\alpha \subseteq AutLie(S)$ می باشند و$c_\alpha \circ \varphi : \Lambda \longrightarrow G^\alpha$ نگاشت باز است. اگر S_i ساده مجرد باشند در نتیجه α_i ها ممکن است همانی انتخاب شوند.

مراجع

[۱] S. Grosser, M. Moskowitz, On central topological groups, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967) 317–340, MR0209394 (35-292).

[۲] É. Cartan, Sur les représentations linéaires des groupes clos, Comment. Math. Helv. 2 (1)

(1930) 269–283, MR1509418.

[۳] H. Freudenthal, Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I, Ann. of Math. (2) 42 (1941) 1051–1074, MR0005740 (3,198a).

[۴] R.R. Kallman, The topology of compact simple Lie groups is essentially unique, Adv. Math. 12 (1974) 416–417, MR0357677 (50-10145).

[۵] Y. Peterzil, A. Pillay, S. Starchenko, Simple algebraic and semialgebraic groups over real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (10) (2000) 4421–4450 (electronic), MR1779482 (2001i:03080).

[۶] A. Kleppner, Measurable homomorphisms of locally compact groups, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (2) (1989) 391– 395, MR0948154 (89k:22005); Proc. Amer. Math. Soc. 111 (4) (1991) 1199–1200, correction.

[۷] B.L. van der Waerden, Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen, Math. Z. 36 (1) (1933) 780–786, MR1545369.

[۸] J. Tits, Classification of algebraic semisimple groups, in: Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, CO, 1965, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, pp. 33–62, MR0224710 (37-309).

[۹] A. Borel, J. Tits, Homomorphismes “abstraits” de groupes algébriques simples, Ann. of Math. (2) 97 (1973) 499– 571, MR0316587 (47- **Books:** 5134).

[۱۰] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, corrected reprint of the 1978 original, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, MR1834454 (2002b:53081).

[۱۱] E. Hewitt, K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis. Vol. I, second edition, Springer, Berlin, 1979, MR0551496 (81k:43001).

[۱۲] A.W. Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, second edition, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002, MR1920389 (2003c:22001).

[۱۳] H. Salzmann, et al., Compact Projective Planes, de Gruyter Exp. Math., vol. 21, de Gruyter, Berlin, 1995, MR1384300 (97b:51009).

[۱۴] H. Salzmann, et al., The Classical Fields, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, MR2357231 (2008m:12001).

[۱۵] M. Stroppel, Locally Compact Groups, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006, MR2226087 (2007d:22001).

[۱۶] G.Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups. I, Springer, New York, 1972, MR0498999 (58-16979).

[۱۷] G.Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups. I, Springer, New York, 1972, MR0498999 (58-16979).

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

گروه های R–تجزیه پذیر و P–گروه های لیندلوف

غلام رضا رضایی*، عضو هیأت علمي گروه رياضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، grezaie@hamoon.usb.ac.ir
محمد ذوالفقاری دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، M.Z.seven۱۴@gmail.com

چکیده: در این مقاله می خواهیم انواع متفاوت گروه های توپولوژی را با ساختار های تجزیه پذیر مورد بررسی قرار داده و زیر گروه های آنها را مشخص کنیم ،که از آن جمله گروه های توپولوژی، می توان به P–گروه های لیندلوف اشاره کرد. ما ثابت می کنیم که یک P–گروه، R–تجزیه پذیر است اگروتنها اگر شبه–ω_1–فشرده و اگروتنها اگر ω–ثابت باشد در این مقاله نشان می دهیم که حاصل ضرب مستقیم از P–گروه های و تصویر پیوسته از P–گروه های R–تجزیه پذیر، R–تجزیه پذیر است

کلمات کلیدی: گروه R–تجزیه پذیر، P–فضا، شبه–ω_1–فشرده، ω–ثابت، Σ–فضای لیندلوف

۱ بررسی P–گروه های R–تجزیه پذیر

تعریف ۱.۱. *گروه توپولوژیکی G را R–تجزیه پذیر گوییم هرگاه برای هر تابع حقیقی مقدار f روی G، هومومورفیسم پیوسته $\Pi : G \longrightarrow H$ به روی گروه توپولوژی شمارای نوع دوم H و تابع پیوسته $h : H \longrightarrow R$ چنان موجود باشد که $f = ho\Pi$.*

توجه ۲.۱. *دقت کنیم که خط حقیقی R، در تعریف فوق را می توان با هر فضای شمارای نوع دوم مانند X جایگزین کرد، زیرا X هومومورفیسم با زیر فضایی از R^ω است.*

تعریف ۳.۱. *فرض کنیم τ کاردینالی نامتناهی باشد، گروه توپولوژیکی G را τ–کراندار گویند هرگاه برای هر همسایگی باز U از عنصر همانی زیر مجموعه $K \subseteq G$ به گونه ای که $|K| \leq \tau$ چنان موجود باشد که $G = K.U$.*

تعریف ۴.۱. *فرض کنیم G گروه توپولوژی باشد، $ib(G)$ عبارت است از کوچکترین کاردینال $\tau \geq \aleph$. به طوریکه G، τ–کراندار باشد.*

تعریف ۵.۱. *اگر برای گروه H داشته باشیم $ib(H) \leq \tau$ آنگاه آن را τ–کراندار گویند.*

تعریف ۶.۱. *گروه توپولوژی X را لیندلوف گویند هرگاه X منظم باشد و هر پوشش باز از X یک زیر پوشش شمارش پذیر داشته باشد.*

تعریف ۷.۱. مجموعه X را P–فضا گوییم، هرگاه هر G_δ–مجموعه در X باز باشد.

تعریف ۸.۱. فضای توپولوژی (X,τ) را دیودونه کامل گوییم هرگاه دارای یک ساختار یکنواخت کامل، منطبق بر τ باشد، به عبارت دیگر فضای X دیودونه کامل است اگروفقط اگر X یک فضای تیخونوف و ساختار یکنواخت ماکسیمال بر X کامل باشد.

تعریف ۹.۱. برای فضای X داریم $WL(X) \leq \tau$ اگر هر پوشش باز γ از X شامل زیر خانواده μ باشد به طوریکه $|\mu| \leq \tau$ و $\bigcup \mu$ در X چگال باشد.

تعریف ۱۰.۱. اگر $WL(X) \leq \omega$ باشد آنگاه فضای X را لیندلوف ضعیف گویند

تعریف ۱۱.۱. فضای X را شبه–ω_1–فشرده گوییم، هرگاه هر خانواده موضعا متناهی از مجموعه های باز در X شمارش پذیر باشد.

تعریف ۱۲.۱. فضای توپولوژی تیخونوف X را σ–فشرده گوییم، هرگاه اجتماع تعداد شمارایی از زیر مجموعه های فشرده باشد.

لم ۱۳.۱. فرض کنیم X فضایی باشد به طوریکه هر خانواده گسسته از مجموعه های باز در X اصلیتی اندازه ناپذیر داشته باشد. بنابراین $\mu X = \nu X$.

نتیجه ۱۴.۱. فرض کنیم H گروه توپولوژی باشد که $ib(H)$ اصلیتی اندازه ناپذیر باشد. بنابراین $\mu H = \nu H$.

هر زیر گروه R–تجزیه پذیر H از گروه توپولوژی G، Z–نشانده در G است و هر G_δ–چگال ،زیر فضای Z–نشانده C–نشانده است لذا می توانیم گزاره زیر را بیان کنیم

گزاره ۱۵.۱. فرض کنیم H یک زیر گروه R–تجزیه پذیر G_δ–چگال از گروه توپولوژیکی K باشد. بنابراین H،یک زیر گروه C–نشانده در K است وگروه K، R–تجزیه پذیر است.

نتیجه ۱۶.۱. هر گروه R–تجزیه پذیر مانند K که $\varrho_\omega K = \mu K = \nu K$ باشد، بنابراین یک PT–گروه است، بعلاوه گروه $\varrho_\omega K$ یک گروه R–تجزیه پذیر است.

نتیجه ۱۷.۱. عبارت های زیر برای زیرگروه های G_δ–چگال H از گروه R–تجزیه پذیر K معادلند:

(۱) گروه H، R–تجزیه پذیر است؛

(۲) گروه H، C–نشانده در K است.

نتیجه ۱۸.۱. تساوی $\varrho H = \mu H = \nu H$ برای هر P–گروه، R–تجزیه پذیر H برقرار است. به خصوص، P–گروه R–تجزیه پذیر دیودونه–کامل، کامل است.

حال نتایج بعدی ما در مورد ω–ثابتی است.

گزاره ۱۹.۱. فرض کنیم H یک زیر گروه C–نشانده چگال از گروه R–تجزیه پذیر K باشد. بنابراین گروه H، ω–ثابت است اگر و تنها اگر K، ω–ثابت باشد.

لم ۲۰.۱. فرض کنیم γ خانواده ای از همه همومورفیسم های پیوسته از P-گروه $\aleph_\circ$-کراندار G به روی P-گروه هایی با $\omega_1 \leq$وزن باشد. اگر تصویر $f(G)$ که $f \in \gamma$ لیندلوف باشد، بنابراین هر $f \in \gamma$ باز است.

نتیجه ۲۱.۱. هر همومورفیسم پیوسته $f : G \longrightarrow H$ از P-گروه شبه-ω_1-فشرده G به روی P-گروه H با $\omega_1 \leq$وزن، باز است.

لم ۲۲.۱. فرض کنیم G یک P-گروه، شبه-ω_1-فشرده باشد و γ خانواده همه همومورفیسم های خارج قسمتی $f : G \longrightarrow K$ به روی گروه هایی باشد که $W(K) \leq \omega_1$. بنابراین خانواده γ، ω_1-کامل است.

نتیجه ۲۳.۱. فرض کنیم H یک P-گروه شبه-ω_1-فشرده با $\psi(H) \leq \omega_1$ باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که $W(H) \leq \omega_1$.

نتیجه ۲۴.۱. هر P-گروه، R-تجزیه پذیر، ω_1-ثابت است.

لم ۲۵.۱. خانواده γ شامل تمام همومورفیسم های خارج قسمتی از P-گروه شبه-ω_1-فشرده G به روی گروه هایی با $\omega_1 \leq$وزن، ω_1-مشبک است.

نتیجه ۲۶.۱. هر P-گروه شبه-ω_1-فشرده، ω_1-شبکه ای است. به خصوص $c(G) \leq \omega_1$.

لم ۲۷.۱. فرض کنیم G گروه توپولوژیکی باشد به طوریکه برای هر تابع پیوسته $f : G \longrightarrow R$، همومورفیسم پیوسته $\Pi : G \longrightarrow H$ به روی گروه R-تجزیه پذیر H چنان موجود است که $f \prec \Pi$. بنابراین گروه G نیز R-تجزیه پذیر است.

قضیه ۲۸.۱. برای P-گروه G، شرایط زیر معادلند:

(۱) گروه G، R-تجزیه پذیر است؛

(۲) گروه G، شبه-ω_1-فشرده است؛

(۳) گروه G، ω-ثابت است؛

(۴) گروه G، $\aleph_\circ$-کراندار است و تصویر پیوسته هر همومورفیسم H از G با $\psi(H) \leq \omega_1$ لیندلوف است.

لم ۲۹.۱. P-فضای منظم لیندلوف ضعیف، لیندلوف می باشد.

۲ P-گروه های R-تجزیه پذیر و حاصل ضرب ها و تصویر همومورفیسم ها

در مورد حاصل ضرب گروه های R-تجزیه پذیر اطلاعات کمی وجود دارد مانند این که آیا حاصل ضرب گروه های R-تجزیه پذیر با گروه های فشرده، R-تجزیه پذیر است؟ در حقیقت پاسخ گفتن به این سوال معادل پاسخ گفتن به این است که هر گروه R-تجزیه پذیر شبه-ω_1-فشرده است. در قضیه (۵.۲) نشان می دهیم که حاصل ضرب مستقیم دلخواه از P-گروه های R-تجزیه پذیر، R-تجزیه پذیر است.

لم ۱.۲. فرض کنیم هر زیر حاصل ضرب متناهی از حاصل ضرب $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ شبه-ω_1-فشرده باشد بنابراین X همواره شبه-ω_1-فشرده می باشد

لم ۲.۲. فرض کنیم $G=\prod_{i\in I} G_i$ حاصل ضرب مستقیم از گروه های توپولوژیکی τ-کراندار باشد و $\varphi: G\longrightarrow K$ هومورفیسم پیوسته به گروه K با $\psi(K)\leq\tau$ باشد. بنابراین برای هر $i\in I$ می توانیم هومورفیسم خارج قسمتی $P_i: G_i\longrightarrow H_i$ را به روی گروه H_i با $\psi(H_i)\leq\tau$ و هومورفیسم پیوسته $h:\prod H_i\longrightarrow K$ را به گونه ی پیدا کنیم که $\varphi=hoP$، $P:G\longrightarrow\prod_{i\in I} H_i$ حاصل ضرب مستقیم هومورفیسم های P_i است.

لم ۳.۲. فرض کنیم $G=\prod_{i\in I} G_i$ حاصل ضرب مستقیم از گروه های توپولوژی و $P:G\longrightarrow H$ هومورفیسم پیوسته به گروه توپولوژیکی H باشد که $\psi(H)\leq\tau$. بنابراین مجموعه ی $j\subseteq I$ که $|j|\leq\tau$ چنان موجود است که نگاشت تصویری $\Pi_j: G\longrightarrow G_j=\prod_{i\in j} G_i$ به گونه ای است که $\Pi_j\prec P$.

لم ۴.۲. فرض کنیم $G=\prod_{n\in\omega} G_n$ حاصل ضرب P-گروه هایR-تجزیه پذیر باشد. اگر $\varphi: G\longrightarrow K$ هومورفیسم پیوسته به روی گروه K با $\psi(K)\leq\omega_1$، بنابراین گروه K لیندلوف است و $nW(K)<\omega_1$.

قضیه ۵.۲. هر حاصل ضرب دلخواه $G=\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ از P-گروه هایR-تجزیه پذیر، R-تجزیه پذیر است. بعلاوه برای هر تابع حقیقی-مقدار پیوسته f روی G، هومورفیسم خارج قسمتی $\Pi: G\longrightarrow L$ به روی گروه شمارای نوع دوم L چنان موجود است که $\Pi\prec f$.

گزاره ۶.۲. فرض کنیم $G=\prod_{i\in I} G_i$ حاصل ضرب مستقیم از P-گروه های R-تجزیه پذیر باشد. لذا به ازای $\tau\in\{\omega,\omega_1\}$، گروه G، τ-ثابت است و داریم $ceL_{\omega_1}(G)\leq\omega_1$.

قضیه ۷.۲. تصویر هومورفیسم پیوسته از حاصل ضرب دلخواه از P-گروه هایR-تجزیه پذیر، R-تجزیه پذیر است.

نتیجه ۸.۲. هر تصویر هومورفیسم پیوسته از P-گروه R-تجزیه پذیر، R-تجزیه پذیر است.

مثال ۹.۲. هر تصویر هومورفیسم پیوسته از گروه R-تجزیه پذیر، ω-ثابت R-تجزیه پذیر است.

لم ۱۰.۲. گروه توپولوژیکی H متعلق به $\nu(H)$ است اگر و تنها اگر H یک زیر گروه چگال از تصویر هومورفیسم پیوسته از حاصل ضرب از Σ-گروه های لیندلوف باشد

مراجع

[1] A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures, Atlantis Stud. Math., vol. 1, Atlantis Press, World Scientific, Paris, Amsterdam, 2008.

[2] C.Hernandez and M.Tkachenko, subgroups of R-factorizable groups, comment.Math.Univ.Carolinae 39,2(1998)371-378.

[3] I.Juhasz, cardinal functions in Topology-ten years later, Mathematisch centrum, 1980.

[4] R.Engelking.General Topology, PWN, warsaw. 1977.

[5] M.Tkachenko, R-factorizable groups and subgroups of lindelof p-groups,Topology and its Application 136(2004) 135-167.

[6] M.G. Tkachenko, Subgroups, quotient groups and products of R-factorizable groups, Topology Proc. 16 (1991) 201–231.

[7] K.C.Rao, Topology, Alpha science International ltd, 2008.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

-توسیع های برانت توپولوژی از نیم گروه های معکوس توپولوژی بطور مطلق H-بسته

منصور نکوآمال کرمانی، فارغ- التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، $mansournekoamall@yahoo.com$

رومینا خانه گیر، فارغ- التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، $khanegir66@gmail.com$

چکیده: در این مقاله برخی خواص تصاویر همریختی نیم گروه λ-توسیع های برانت جبری اثبات شده است. برای هر عدد اصلی $\lambda \geq 2$ اثبات می شود که هر λ-توسیع برانت از یک نیم گروه معکوس توپولوژی بطور مطلق H-بسته، در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی بطور مطلق H-بسته است.

کلمات کلیدی: نیم گروه معکوس توپولوژی، λ-توسیع برانت توپولوژی، نیم گروه معکوس توپولوژی H-بسته، نیم گروه بطور جبری H-بسته

پیش گفتار

در این مقاله همه فضاها هاسدروف است. یک نیم گروه(معکوس) توپولوژی یک فضای توپولوژی با عمل ضرب تواما پیوسته(به همین نحو، یک عمل معکوس پیوسته) است اگر S یک نیم گروه باشد، آنگاه با $E(S)$ نوار S را نمایش می دهیم، نیم گروه S را با صفر الحاقی با S^1 نمایش می دهیم.

فرض کنید S یک نیم گروه با صفر و I_λ یک مجموعه غیر تهی با عدد اصلی λ باشد عمل نیم گروه را روی مجموعه

$$B_\lambda(S) = I_\lambda \times S \times I_\lambda \cup \{0\}$$

برای همه $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in I_\lambda$ و $a,b \in S$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(\alpha,a,\beta)\cdot(\gamma,b,\delta) = \begin{cases} (\alpha,ab,\delta) & if \;\; \beta=\gamma \\ 0 & if \end{cases}$$

و $(\alpha,a,\beta)\cdot 0 = 0\cdot(\alpha,a,\beta) = 0\cdot 0 = 0$.

در این صورت $B_\lambda(S)$ یک نیم گروه است، که آنرا λ-توسیع برانت روی نیم گروه S می نامیم.

بعلاوه، اگر $A \subseteq S$ و شامل صفر نباشد، برای $\alpha,\beta \in I_\lambda$ مجموعه $A_{\alpha\beta}$ را بصورت

$$A_{\alpha\beta} = \{(\alpha,s,\beta)\,|s \in A\}$$

نشان خواهیم داد و اگر $0 \in A$ بود آنگاه $A_{\alpha\beta} = \{(\alpha,s,\beta)\,|s \in A\setminus\{0\}\}$ است. فرض کنید G یک خانواده از نیم گروه های توپولوژی باشد. نیم گروه توپولوژی $G \in S$ را در خانواده G، H-بسته گویند هرگاه S در هر نیم گروه توپولوژی T که شامل S به عنوان یک زیر نیم گروه است، بسته باشد. اگر G خانواده همه نیم گروه های توپولوژی باشد، آنگاه نیم گروه S را H-بسته گویند که در [۲] معرفی شده است. فرض کنید G یک خانواده از نیم گروه های توپولوژی باشد. نیم گروه توپولوژی $G \in S$ را در خانواده G،

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

بطور مطلق H-بسته گویند هرگاه تصویر هر همریختی پیوسته از S به $T \in G$ در G، H-بسته باشد. اگر G خانواده همه نیم گروه های توپولوژی باشد، آنگاه S را بطور مطلق H-بسته گویند.

فرض کنید G یک خانواده از نیم گروه های توپولوژی باشد. نیم گروه توپولوژی $S \in G$ را در خانواده G،بطور جبری h-بسته گویند، هرگاه S با توپولوژی گسسته در G بطور مطلق H-بسته باشد و $(S,\sigma) \in G$. اگر G خانواده همه نیم گروه های توپولوژی باشد، آنگاه نیم گروه S را بطور جبری h-بسته گویند که در [۳] معرفی شده است. بوضوح، هر نیم گروه بطور جبری h-بسته بطور مطلق H-بسته است. نشان می دهیم عکس گزاره برقرار نیست. فرض کنید $h : B_\lambda(S) \to T$ یک همریختی باشد، بطوریکه

$$h((\alpha, x, \beta)) = h(0)$$

برای یک $x \in S^1$ و $\alpha, \beta \in I_\lambda$، آنگاه برای همه $y \in S^1xS^1$ و $\gamma, \delta \in I_\lambda$ داریم

$$h((\gamma, y, \delta)) = h(0).$$

همریختی $h : S \to T$ پوچساز نامیده می شود اگر $c \in T$ وجود داشته باشد بطوریکه برای همه $a \in S$ داشته باشیم $h(a) = c$. همریختی $h : B_\lambda(S) \to T$ پوچساز است اگر و تنها اگر همریختی

$$h|_{B_\lambda} : B_\lambda = B_\lambda(1) \to T$$

پوچساز باشد. فرض کنید $h : B_\lambda(S) \to T$ یک همریختی باشد، بطوریکه برای $a, b \in S^1$ و $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in I_\lambda$ داشته باشیم

$$h((\alpha_1, a, \beta_1)) = h((\alpha_2, b, \beta_2))$$

اگر $\alpha_1 \neq \alpha_2$ یا $\beta_1 \neq \beta_2$ آنگاه $h((\alpha_1, a, \beta_1)) = h(0)$. فرض کنید $\lambda \geq 2$ و $B_\lambda(S)$ یک λ-توسیع توپولوژی از نیم گروه توپولوژی S باشد. اگر T یک نیم گروه توپولوژی و $h : B_\lambda(S) \to T$ یک همریختی پیوسته باشد. آنگاه مجموعه های $h(A_{\alpha\beta})$ و $h(A_{\gamma\delta})$ در T برای همه $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in I_\lambda$ و $A \subseteq S^1$، یکسانریخت هستند. فرض کنید $\lambda \geq 2$، $B_\lambda(S)$ یک λ-توسیع توپولوژی S، T یک نیم گروه توپولوژی و $h : B_\lambda(S) \to T$ یک همریختی پیوسته باشد، اگر $A \subseteq h(B_\lambda(S))$ و مجموعه A حداقل با دو زیر مجموعه از نوع $h(S_{\alpha\beta})$ اشتراک داشته باشد. آنگاه

$$h(0) \in A \cdot A.$$

فرض کنید $\lambda \geq 2$، S و T نیم گروه های جبری و $h : B_\lambda(S) \to T$ یک همریختی باشد و A، B زیر مجموعه های مجزایی از $h(B_\lambda(S))$ باشند. اگر مجموعه های A و B حداقل با دو زیر مجموعه از نوع $h(S_{\alpha\beta})$ اشتراک داشته باشند $(\alpha, \beta \in I_\lambda)$، آنگاه $h(0) \in A \cdot B$ یا $h(0) \in B \cdot A$. فرض کنید $\lambda \geq 2$، $B_\lambda(S)$ و T نیم گروه های معکوس توپولوژی $h : B_\lambda(S) \to T$ یک همریختی پیوسته باشد بطوریکه مجموعه $h(S_{\alpha\beta})$ برای $\alpha, \beta \in I_\lambda$ در T بسته باشد. آنگاه $h(B_\lambda(S))$ یک زیر نیم گروه بسته از T است. اگر S یک نیم گروه توپولوژی بطور مطلق H-بسته(در رده نیم گروه های توپولوژی) باشد، آنگاه S^1 نیز چنین است(اگر $S^1 \in G$ باشد). برای هر عدد اصلی $\lambda \geq 2$، هر λ-توسیع برانت توپولوژی $B_\lambda(S)$ از یک نیم گروه معکوس توپولوژی بطور مطلق H-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی، بطور مطلق H-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است. برای هر عدد اصلی $\lambda \geq 2$، هر λ-توسیع برانت توپولوژی $B_\lambda(S)$ از نیم گروه معکوس توپولوژی فشرده S در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی، بطور مطلق H-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است.

فرض کنید S یک نیم گروه معکوس توپولوژی باشد.آنگاه شرایط زیر هم ارزند:

i S یک نیم گروه بطور مطلق H-بسته در رده نیم گروه

های معکوس توپولوژی است؛

ï عدد اصلی $2 \geq \lambda$ وجود دارد بطوریکه هر λ-توسیع برانت توپولوژی $B_\lambda(S)$ از نیم گروه S بطور مطلق H-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است؛

ï برای هر عدد اصلی $2 \geq \lambda$ هر λ-توسیع برانت توپولوژی $B_\lambda(S)$ از نیم گروه S بطور مطلق H-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است. برای هر عدد اصلی $2 \geq \lambda$، هر λ-توسیع برانت توپولوژی $B_\lambda(S)$ از نیم گروه معکوس بطور جبری h-بسته S در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی بطور جبری h-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است.

برای نیم گروه S معکوس شرایط ذیل هم ارزند:

ïS یک نیم گروه بطور جبری h-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است؛

ï برای عدد اصلی $2 \geq \lambda$، $B_\lambda(S)$ بطور جبری h-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است؛

ï برای هر عدد اصلی $2 \geq \lambda$، $B_\lambda(S)$ بطور جبری h-بسته در رده نیم گروه های معکوس توپولوژی است.

مراجع

[۱] Gutik O. and Pavlyk، K. *Topological λ-extensions of Brandt λ-extensions of absolutely H-closed topological inverse semigroups*، Visnyk of the Lviv University. Seri. Mech. & Math. Soc. ۶۱ (۲۰۰۳)، pp. ۹۸—۱۰۵.

[۲] J. W. Stepp، *A note on maximal locally compact semigroups*، Proc. Amer. Math. ۲۰ (۱۹۶۹)، pp. ۲۵۱—۲۵۳.

[۳] J. W. Stepp، *Algebraic maximal semilattices*، Paci. Jour. of Math. ۵۸ (۱۹۷۵)، pp. ۲۴۳—۲۴۸.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014

چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Some examples concerning fuzzy topological dimension

M. Abry[*], Academic member,

Damghan University, mabry@du.ac.ir

Jafar Zanjani, Ph. D. student,

Damghan University, pjefa@yahoo.com

Abstract: We investigate the dimension of fuzzy topological spaces and introduce the concept of almost zero dimensionality for fuzzy topological spaces. Some analogous examples in fuzzy cases are constructed and compared with analogous ones in the classic sense.

Keywords: fuzzy topology, almost zero-dimensional space, totally disconnected, ind(X).

1 INTRODUCTION

The dimension theory for fuzzy topological spaces has been studied by several authors. Adnadjevic introduced the generalized fuzzy spaces, GF-spaces, and, for them, defined two dimension functions $\mathrm{F-ind}$, $\mathrm{F-Ind}$ [2],[3]. The c-zero dimensional and strongly c-zero dimensional fuzzy topological spaces and the fuzzy covering dimension are defined by Ajmal and kohli [4]. In [6],[7] Tarres and Cuchillo-Ibanez established that the c-zero dimensionality and the strongly c-zero dimensionality are not good extension (in the Lowen sense) and introduced a new definition of the boundary of a fuzzy set so that it would characterize clopen sets as sets with empty boundary. In the latest strive to define the dimension function, Baiju and Sunil have extend the concept of covering dimension of general topological spaces to L-topological spaces [5].

In this paper, we introduce an analogue notion of a almost zero-dimensional space in fuzzy case. The concept of an almost zero-dimensional space (AZD) is originally introduced by Oversteegen and Tymchatyn [10]. It is worth pointing out that, when we refer to topological dimensions, we use the notation and definitions in [12]. In particular, ind, represents the small inductive dimension.

Definition 1.1. *A fuzzy topology is a family δ of fuzzy sets in X which satisfies the following conditions:*
(i) $\forall c \in I$, $c_X \in \delta$,
(ii) $\forall \mu, \nu \in \delta \Rightarrow \mu \wedge \nu \in \delta$,
(iii) $\forall (\mu_j)_{j \in J} \subset \delta \Rightarrow \bigvee_{j \in J} \mu_j \in \delta$.

δ is called a *fuzzy topology* for X, and the pair (X, δ) is called a *fuzzy topological space*. Open sets, closed sets and clopens are defined as usual. In Chang's definition of fuzzy topology, which we will refer to as *quasi fuzzy topology*, condition (i) should be replaced by $(i)'$ $0, 1 \in \delta$. A base or subbase for a fuzzy space have the same meaning in the classic sense [9].

Theorem 1.2. *If fuzzy topological space (X, δ) is fuzzy regular and has a σ-fuzzy locally finite base, then it is fuzzy pseudo-metrizable [13].*

It should be noted that the concept of the

[*]Corresponding Author

boundary of a fuzzy set is essential in the definition of inductive dimension. Cuchillo and Tarres [7] proposed a new definition of fuzzy boundary of a fuzzy set. Throughout this paper we use their definition.

Definition 1.3. *Let μ be a fuzzy set in a fuzzy topological space X. The fuzzy boundary of μ, denoted by* $\mathrm{Fr}(\mu)$, *is defined as the infimum of all closed fuzzy sets σ in X with the property $\sigma(x) \geq \overline{\mu}(x)$ for all $x \in X$ for which $\overline{\mu}(x) - \mu^{\circ}(x) > 0$ [7].*

It is ready that a fuzzy set μ is *clopen* if and only if $\mathrm{Fr}(\mu) = 0_{\mathrm{X}}$. If the definition of the Adnadjevic's dimension function [2] is particularized, in the case of zero dimensionality, the following definition is obtained

Definition 1.4. *For a fuzzy topological space X we have* $\mathrm{ind(X)} = 0$ *if for each fuzzy point x_α in X and every fuzzy open set μ containing x_α, there exists an open fuzzy set σ in X with* $\mathrm{Fr}(\sigma) = 0_{\mathrm{X}}$ *such that $x_\alpha \in \sigma \leq \mu$[7].*

A subset of a space is called a *C-set* if it can be written as an intersection of clopen subsets of the space. By [8, Proposition 6.1] a space X is *almost zero-dimensional (AZD)* if and only if for every $x \in X$ and every neighborhood U of x there exists a C-set neighborhood V of x with $V \subset U$. It is shown in [10] that the dimension of these spaces is at most one; see [1] for a simpler proof.

2 Fuzzy almost zero dimensionality

Theorem 2.1. *Zero dimensionality in quasi fuzzy topological spaces is good extension. Indeed* $\mathrm{ind}(\mathrm{X}, \tau) = 0$ *if and only if* $\mathrm{ind}(\mathrm{X}, \omega(\tau)) = 0$.

A space (X, δ) is called *fuzzy almost zero-dimensional (F-AZD)* if for each fuzzy point x_α in X and every fuzzy open set μ with $x_\alpha \in \mu$, there exists a fuzzy C-set σ such that $x_\alpha \in \sigma \leq \mu$.

In our main example we follow the method in [11] and use essentially this fact that every nonempty clopen set of *Erdős space* is unbounded. Recall that the Cantor set is an universal for all separable metrizable zero-dimensional spaces, that is, every such space can be imbedded into Cantor set. Specially countable product of rationals with standard metric

$$\rho(x, y) = \frac{\Sigma_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|}{2^i}$$

an be imbedded into C. Using such embedding and taking a suitable collection of fuzzy sets on the image of it such that all of them are some factors of some charactristics maps we construct a fuzzy space X with Lowen topology that is regular, second countable and again zero dimensional. This example raises the following quastion.

Question 2.2. *Let (X, δ) be a regular fuzzy topological space. and let δ be generated by a family of functions that are factors of any charactristics functions. Is X zero-dimensional?*

The ground space in our example is almost zero dimensional and so we may ask the following quastion.

Question 2.3. *Is there almost zero-dimensional fuzzy topological space that is not zero-dimensional?*

References

[1] M. Abry and J.J. Dijkstra, "On topological Kadec norms," Math. Ann., vol. 332, pp. 759-765, 2005.

[2] D. Adnadjevic, "Dimension of fuzzy spaces," Fuzzy sets and systems, vol. 26, pp. 85-92, 1988.

[3] D. Adnadjevic, "Some properties of the dimension $F - Ind$ of $GF - Spaces$," Fuzzy sets and systems, vol. 54, pp. 221-224, 1993.

[4] N.Ajmal, J.K.Kohli, "Zero dimensional and strongly zero dimensional fuzzy topological spaces," Fuzzy sets and systems, vol. 61, pp. 231-237, 1994.

[5] T. Baiju, J.J. Sunil, "Covering dimension and normality in L-topological spaces," Mathematical Sciences, vol. 6, pp. 35-46, 2012.

[6] E. Cuchillo-Ibanez, J. Tarres, "On zero dimensionality in fuzzy topological spaces," Fuzzy sets and systems, vol. 82, pp. 361-367, 1996.

[7] E. Cuchillo-Ibanez, J. Tarres, "On the boundary of fuzzy sets," Fuzzy sets and systems, vol. 89, pp. 113-119, 1997.

[8] J. J. Dijkstra, J. van Mill, and J. Steprāns, "Complete Erdős space is unstable," Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol.137, pp. 465-473, 2004.

[9] R. Lowen, "Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness," J. Math.Anal.Appl., vol. 56, pp. 621-633, 1976.

[10] L. G. Oversteegen and E. D. Tymchatyn, "On the dimension of certain totally disconnected spaces," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 122, pp. 885-891, 1994.

[11] J.H. Roberts, "The rational points in Hilbert space," Duke Math., vol. 23, pp. 489-491, 1956.

Books:

[12] R. Engelking, Dimension Theory, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[13] N. Palaniappan, Fuzzy Topology, Narosa Publishing House, New Delhi, 2002.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

فضاهای توپولوژیک KC

فاطمه حیدری، فاطمه حیدری ، دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ریاضی محض،
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، $fatemeheidari50@yahoo.com$
بهنام بازیگران، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، $bazigaran@kashanu.ac.ir$

چکیده: شرط KC به عنوان یک اصل جداسازی اهمیت خاصی دارد. هدف این مقاله مروری است بر نتایج بدست آمده در مورد فضاهایی که این شرط را دارند.

کلمات کلیدی: - فضای KC ‏ ۲-فضای US ‏ ۳- فضای دنباله‌ای

مقدمه

یکی از خواص مهم و پرکاربرد فضاهای هاسدورف این است که زیرمجموعه‌های فشرده، بسته‌اند، لذا بررسی فضاهایی که این خاصیت را دارند از اهمیت خاصی برخوردار است که منجر به‌بیان فضاهای توپولوژیک KC شد. فضای توپولوژیک (X,τ) را یک **فضای KC** [۹] گوئیم، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی فشرده آن بسته باشد. از جنبه تاریخی در سال ۱۹۶۷، مفهوم فضای KC برای اولین بار توسط ویلانسکی[۱] معرفی شد و از آن تاریخ ساختار این فضا مورد توجه بسیاری قرار گرفت و تلاش‌های بسیاری در بررسی خواص KC توسط محققین صورت گرفته است. موارد استعمال وسیع فضاهای KC در شاخه‌های مختلف توپولوژی موجب شده است که این فضا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شود. بعضی از قضایا که در مورد فضاهای هاسدورف برقرارند در مورد فضاهای KC هم صادقند. به‌عنوان مثال می‌توان به قضیه اشاره نمود. شرط KC بودن یک فضا یک شرط جداسازی به‌حساب می‌آید و همان‌طور که خواهیم دید جایگاه آن در بین اصول مورد مطالعه قرار گرفته است.

این مقاله مشتمل بر سه بخش است که در بخش اول به‌بیان مفاهیم مورد نیاز می‌پردازیم و در بخش دوم اهم خواص فضاهای توپولوژیک KC را بررسی می‌کنیم و در بخش آخر به ارائه چند نتیجه از فضای توپولوژیک KC می‌پردازیم.

پیش‌نیازها

فضای توپولوژیک (X,τ) را يك **فضای فرشه** [۲] گویند، هرگاه به ازای هر $A\subseteq X$ و هر $x\in\overline{A}$، دنباله‌ای از نقاط A وجود داشته باشد که همگرا به x باشد. به‌وضوح هرفضای توپولوژیک که در اولین اصل شمارایی صدق کند، فرشه است. فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد و $S\subseteq X$.

۱- S را **بسته دنباله‌ای** گویند هرگاه هیچ دنباله‌ای در S همگرا به $X\setminus S$ نباشد.

[۱] Wilansky

[۲] Frechet

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

۲- S را **باز دنباله‌ای** گویند هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X همگرا به $x \in S$، Nای وجود داشته باشدکه به ازای هر $n \geq N$، $x_n \in S$. فضای توپولوژیک (X, τ) را یك **فضای دنباله‌ای** می‌نامند، هرگاه در یکی از دو شرایط معادل زیر صدق کند.

۱- هر زیرمجموعه باز دنباله‌ای در X، باز باشد.

۲- هر زیرمجموعه بسته دنباله‌ای در X، بسته باشد.

به موجب تعریف فضای فرشه واضح است که هر فضای فرشه، دنباله‌ای است، اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.(مثال ۱.۶.۱۹ از [۴]) خاصیت $\mathcal{P}$ از فضای توپولوژیك X را **موروثی** گویند هرگاه هر زیرفضای X نیز از آن بهره‌مند باشد. فرض کنید $\mathcal{P}$ یك خاصیت توپولوژیکی باشد، در این صورت فضای (X, τ) را $\mathcal{P}$- مینیمال($\mathcal{P}$-ماکزیمال) گویند، هرگاه (X, τ) خاصیت $\mathcal{P}$ را داشته باشد و هیچ توپولوژی به‌طور اکید درشت‌تر (ظریف‌تر) از τ که خاصیت $\mathcal{P}$ را داشته باشد، بر روی X وجود نداشته باشد. توجه داشته باشید که اگر $\mathcal{P}$ یک خاصیت توپولوژیکی باشد، آن‌گاه $\mathcal{P}$- مینیمال و $\mathcal{P}$ - ماکزیمال نیز یک خاصیت توپولوژیکی است. فضای توپولوژیک (X, τ) را یك **فضای** US می‌نامند، هرگاه هر دنباله‌ی همگرا از X، حد منحصر به‌فردی داشته باشد.

خواص فضاهای توپولوژیک KC

در مثال ۵.۱ از [۵]، نشان داده شده است که خاصیت دنباله‌ای در فضاهای دنباله‌ای، موروثی نیست. اما در مورد فضاهای KC و US باید متذکر شد که به‌وضوح خاصیت KC و US بودن موروثی است. با توجه به دو مثال ذیل مشاهده می‌شود که حاصل ضرب دو فضای KC، لزوماً KC نیست. فرض کنید (Q, τ) فضای اعداد گویا با توپولوژی زیرفضایی باشد و همچنین $(Q^\star, \tau^\star)$ فشرده سازی تك نقطه‌ای از (Q, τ) باشد. فضای (Q, τ) فشرده موضعی نیست و در نتیجه $(Q^\star, \tau^\star)$ هاسدورف نخواهد بود [۴]. اما در فضای فشرده $(Q^\star, \tau^\star)$ بسته‌ها فشرده‌اند و هر زیرمجموعه‌ی فشرده از $Q^\star$، بسته است و لذا $(Q^\star, \tau^\star)$ فضایی KC است. مثال نشان می‌دهد که فضاهای هاسدورف حالت خاصی از فضاهای KC هستند. بنابر مثال ، $Q^\star$ فضایی KC است. فرض کنید $X = Q^\star \times Q^\star$. حول نقطه $p = (\infty, 0) \in X$ پایه همسایگی $\mathcal{B}$ متشکل از مجموعه‌های

$$B(K, \varepsilon) = (Q^\star \setminus K) \times I_\varepsilon$$

که در آن $0 > \varepsilon$، $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap Q$ و K زیرمجموعه‌ی فشرده از X است در نظر بگیرید. از آنجا که $\Delta = \{(x, x) : x \in Q^\star\}$ همسانریخت با $Q^\star$ است، لذا Δ فشرده است و از طرفی به ازای هر $B(K, \varepsilon) \in \mathcal{B}$، داریم $I_\varepsilon \setminus K \neq \emptyset$. با انتخاب عنصر $y \in I_\varepsilon \setminus K$، داریم $(y, y) \in \Delta \cap B(K, \varepsilon)$. چون $B(K, \varepsilon)$ دلخواه بود و $p \notin \Delta$ (زیرا $\infty \neq 0$)، پس $p \in (\overline{\Delta})_X \setminus \Delta$ و لذا Δ بسته نیست درحالیکه فشرده بود، بنابراین X فضای KC نیست. به‌موجب مثال فضای توپولوژیک $(Q^\star, \tau^\star)$، KC، فشرده و غیر هاسدورف است و بنابر قضیه ۲ از [۷] می‌توان گفت فضای $(Q^\star, \tau^\star)$ فشرده ماکزیمال است. [۹] هر فضای هاسدورف، KC است، هر فضای KC، US است و هر فضای US، T_1 است. به عبارتی نمادین داریم:

$$T_2 \Longrightarrow KC \Longrightarrow US \Longrightarrow T_1.$$

عکس گزاره ، حتی در حالت فشرده بودن فضا لزوماً برقرار نیست. به‌عنوان مثال در توپولوژی متمم متناهی بر یک مجموعه نامتناهی که به وضوح T_1 و فشرده است، به‌راحتی دیده می‌شود که هر دنباله با نقاط دو به دو متمایز به هر نقطه از فضا همگرا است و در این صورت فضا US نیست. همچنین اگر X مجموعه‌ای ناشمارا با توپولوژی متمم شمارای τ باشد، در این صورت (X, τ) فضایی US است ولی هاسدورف

نیست. در دو مثال ۲ و ۴ از [۹] نشان داده شده است که باوجود فشردگی فضا، ازشرط US بودن فضا نمی‌توان KC بودنش را نتیجه گرفت و از شرط KC بودن فضا نمی‌توان هاسدورف بودنش را نتیجه گرفت. در ادامه شرایطی را بر روی فضای توپولوژیکی X قرار می‌دهیم که منجر به برقراری عکس روابط در گزاره شود. [۶] اگر X فضایی فرشه و US باشد، آن‌گاه X فضایی KCاست. [۹] اگر فضای X در اولین اصل شمارایی صدق کند و US باشد، آن‌گاه هاسدورف است. [۱۰] اگر فضای X در اولین اصل شمارایی صدق کند و KC باشد، آن‌گاه هاسدورف است.

[۹] اگر در هر نقطه از فضای X پایه موضعی از همسایگی‌های فشرده داشته باشیم، X هاسدورف است اگر و تنها اگر فضای KC باشد. از آنجاکه خاصیت توپولوژیکی KC، موروثی است، پس هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی فضای توپولوژیک X، KC است. از طرفی اگر هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی X، KC باشد، آن‌گاه X یک فضای توپولوژیک KC است. زیرا اگر زیرمجموعه‌ی فشرده $K \subseteq X$ چنان موجود باشد که در X بسته نباشد، در این صورت $p \in \overline{K}_X \setminus K$ و $K' = K \cup \{p\}$ که در آن K' زیرمجموعه‌ای فشرده و KC از X است. اما K زیرمجموعه‌ی فشرده از K' است، پس K در K' بسته و $\{p\}$ در K' باز است. پس باز $U \subseteq X$ وجود دارد به‌طوری که $U \cap K' = \{p\}$. بنابراین U یک همسایگی باز حول p در X است به‌قسمی که $U \cap K = \emptyset$، اما متناقض با فرض $p \in \overline{K}_X$ است. بنابراین K باید در X بسته باشد و درنتیجه X فضایی KC است.

یادآوری می‌کنیم که یک نگاشت را **بسته** گویند، هرگاه تصویر هر زیرمجموعه بسته تحت آن، بسته باشد. حال با توجه به تعریف فضای KC و نگاشت بسته، به‌راحتی قضیه‌ی زیر اثبات می‌شود. [۶] اگر X فضایی فشرده و Y فضایی KC باشد، آن‌گاه هر نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$ بسته است. باستفاده از قضیه فوق می‌توان گزاره زیر را اثبات نمود. [۶] اگر تصویر پیوسته یک فضای فشرده و هاسدورف، KC باشد، آن‌گاه هاسدورف است. برای بیان قضیه بعد لازم است قبل از آن قضیه‌ی زیر را بیان کنیم. [۲] اگر X فضایی T_1، شمارا و فشرده باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه A یا فشرده است یا دنباله‌ای در A وجود دارد که به نقطه‌ای از $X \setminus A$ همگرا است. [۲] هر فضای KC که شمارا و فشرده باشد، دنباله‌ای است. [۳] هر فضای فشرده هاسدورف، فشرده ماکزیمال و هاسدورف مینیمال است. در فضاهای توپولوژیکی هاسدورف قضیه ، کاربرد وسیعی دارد، اما در این قضیه یکی از بارزترین مزیت‌های فضای KC بر فضای هاسدورف نمایان خواهد شد، به‌عبارتی نکته مبین این است که هرفضای فشرده ماکزیمال لزوماً هاسدورف نیست و در مثال ۱۰۰ از [۸] نشان داده شده است که هرفضای هاسدورف مینیمال لزوماً فشرده نیست، درحالیکه در [۷] نشان داده شده است که: هر فضای توپولوژیک، KC فشرده است اگر و تنها اگر فشرده ماکزیمال و KC مینیمال باشد.

نتایج

در این بخش نتایجی از فضای توپولوژیک KC را تحت عنوان گزاره بیان می‌کنیم. اگر X یک فضای KC، فشرده و غیرهاسدورف باشد، آن‌گاه $X \times X$، KC نیست. اگر X فضایی KC و دارای یک زیرمجموعه‌ی فشرده و غیرهاسدورف Kباشد، آن‌گاه $X \times X$، KC نیست.

فرض کنید به ازای هر $i \geq 2$، X_i یک فضای KC باشد. در این صورت به ازای هر $i \geq 2$، $\prod\limits_{i\geq 2} X_i$ فضایی KC است اگر و تنها اگر هر زیرفضای فشرده X_i، هاسدورف باشد.

مراجع

[۱] O. T. Alas، M. G. Tkachenko، V. V. Tkachuk، R.G. Wilson، *The FDS-property and spaces in which compact sets are closed*، Sci. Math. Jap.، ۶۱ (۲۰۰۵)، ۴۷۳—۴۸۰.

[۲] O. T. Alas، R. G. Wilson، *Spaces in which compact subsets are closed and the lattice of T۱- topologies on a set*، Commentat. Math. Univ. Carol.، ۴۳ (۲۰۰۲)، ۶۴۱— ۶۵۲.

[۳] D. E. Cameron، *Maximal and minimal topologies*، Trans. Amer. Math. Soc. ۱۶۰ (۱۹۷۱)، ۲۲۹–۲۴۸.

[۴] R. Engelking، *General topology*، PWN، Warszawa، ۱۹۷۷.

[۵] S. P. Franklin، *Spaces in which sequences sufffice II*، Fund. Math. ۶۱ (۱۹۶۷)، ۵۱–۵۶.

[۶] H. P. A. Kunzi، D. van der Zypen، *Maximal (sequentially) compact topologies*، World Scientific، River Edge، (۲۰۰۴)، ۱۷۳—۱۸۷.

[۷] N. Levine، *When are compact and closed equivalent?*، Amer. Math. Monthly، ۷۲(۱۹۶۵)، ۴۱- ۴۴.

[۸] L. A. Steen، J. A. Seebach، *Counterexample in topology*، Springer-verlags، New York، ۱۹۷۸.

[۹] A. Wilansky، *Between* T_1 *and* T_2، Am. Math. Mon. ۷۴ (۱۹۶۷)، ۲۶۱—۲۶۶.

[۱۰] A. Wilansky، *Toplogy for anal- ysis*، Xerox College Publishing، Toronto، ۱۹۷۰.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

فضاهای بطور باز تجزیه پذیر و توسیع های فشرده نیم گروههای توپولوژیک

منصور نکوآمال کرمانی، فارغ- التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، *mansournekoamall@yahoo.com*

رومینا خانه گیر، فارغ- التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، *khanegir66@gmail.com*

چکیده: در این مقاله ثابت می کنیم که عمل نیم گروه از یک نیم گروه توپولوژیک S به یک عمل نیم گروه پیوسته روی فشرده سازی استون- چخ BS توسیع داده می شود به شرط اینکه S یک فضای فشرده نما بطور باز تجزیه پذیر است.

کلمات کلیدی: نیم گروه نیم توپولوژیک، فشرده سازی نیم گروه، طیف معکوس، فضای فشرده نما،فضای بطور باز تجزیه پذیر

پیش گفتار

در ان مقاله همه فضاها تیخونوف هستند. این مقاله از مشکل آشکار سازی نیم گروه های توپولوژی که در نیم گروه های توپولوژیک فشرده نشانده شده اند سبب شده است. یکی از راه های از بین بردن این مشکل یافتن شرایط تضمین کننده ای روی یک نیم گروه توپولوژیکی است که عمل نیم گروه S را به عمل نیم گروه پیوسته روی فشرده سازی استون-چخ βS از S توسیع بدهد. یک گام قاطع در این راستا توسط رزنیچنکو برداشته شده است او ثابت می کند که عمل نیم گروه روی نیم گروه فشرده نمای توپولوژیکی S به یک عمل نیم گروه بطور منفک پیوسته روی βS توسیع پیدا می کند. نشان می دهیم که عمل توسیع داده شده روی βS پیوسته است اگر فضای S جداشدنی و بطور باز تجزیه پذیر باشد، بدین معنی است که هر نگاشت پیوسته ی $f : S \to Y$ به توی فضای شمارای نوع دوم Y می تواند بصورت نگاشت $f = gop$ مرکب از نگاشت پیوسته و باز $p : X \to Y$ به توی فضای شمارای نوع دوم Z و نگاشت پیوسته $g : Z \to Y$ نوشته شود. یادآوری می کنیم که فشرده سازی استون-چخ از فضای تیخونوف X، فضای هاسدورف فشرده βS شامل X به عنوان یک زیر فضای چگال است که هر نگاشت پیوسته $f : X \to Y$ به توی فضای هاسدورف فشرده Y، به نگاشت پیوسته $\overline{f} : \beta X \to Y$ توسیع داده می شود. با تعویض تعریف فضاهای هاسدورف فشرده با فضاهای کامل حقیقی تعریفی از کامل سازی هوویت vX از X بدست می آوریم. خاطر نشان می کنیم که فضای توپولوژیکی X کامل حقیقی است اگر X همسانریخت با یک زیر فضای بسته از توان R^k از خط حقیقی باشد. کامل سازی هوویت vX از فضای تیخونوف X با فشرده سازی استون-چخ خود منطبق است اگر وتنها اگر X فضای فشرده نما باشد در صورتی که هر تابع حقیقی-مقدار پیوسته روی X کراندار باشد.

از طرف دیگر اگر فضای تیخونوف Z کامل حقیقی باشد آنگاه $\upsilon Z = Z$.

فرض کنید C یک گردایه از نیم گروه های نیم توپولوژیک هاسدورف فشرده باشد. بوسیله C-فشرده سازی از نیم گروه نیم توپولوژیک S جفت $(C(S), \eta)$ متشکل از نیم گروه نیم توپولوژیک فشرده $C(S) \in C$ و همریختی پیوسته $\eta : S \to C(S)$ (همریختی متعارف) به نحوی که برای هر همریختی پیوسته $h : S \to K$ به نیم گروه نیم توپولوژیک $K \in C$، همریختی پیوسته و یکتای $\overline{h} : C(S) \to K$ موجود است بطوریکه $h = \overline{h} o \eta$.

این مطلب نتیجه می دهد که هر دو C-فشرده سازی از S یکریخت توپولوژیکی هستند.

C-فشرده سازی های متناظر از یک نیم گروه نیم توپولوژیک S بصورت زیر رده بندی می شوند:

- WAP از نیم گروههای نیم توپولوژیک فشرده
- AP از نیم گروههای توپولوژیک توپولوژیک فشرده
- SAP از گروههای توپولوژیک فشرده

برای هر نیم گروه نیم توپولوژیک بطور شمارش پذیر فشرده S عمل نیم گروه $S \times S \to S$ به عمل نیم گروه بطور منفک پیوسته $\beta S \times \beta S \to \beta S$ توسیع پیدا می کند، این مطلب نتیجه می دهد که نگاشت متعارف $\beta\eta : \beta S \to WAP(S)$ یک همسانریختی است.

برای هر نیم گروه توپولوژیک فشرده نما S عمل نیم گروه $S \times S \to S$ به عمل نیم گروه بطور منفک پیوسته $\beta S \times \beta S \to \beta S$ توسیع پیدا می کند، این مطلب نتیجه می دهد که نگاشت متعارف $\beta\eta : \beta S \to WAP(S)$ یک همسانریختی است. برای هر نیم گروه توپولوژیک S با مربع فشرده نما $S \times S$ عمل نیم گروه $S \times S \to S$ به عمل نیم گروه پیوسته $\beta S \times \beta S \to \beta S$ توسیع پیدا می کند، این مطلب نتیجه می دهد که نگاشت های متعارف $\beta S \to WAP(S) \to AP(S)$ همسانریختی هستند. برای هر گروه توپولوژیک بطور کلی کراندار G همریختی متعارف $WAP(G) \to AP(G) \to SAP(G)$ همسانریختی هستند و نگاشت متعارف $\eta : G \to SAP(G)$ یک نشاننده توپولوژیک است. اگر نیم گروه توپولوژیک فشرده نما S شامل یک گروه توپولوژیک به طور کلی کراندار H به عنوان یک زیر گروه چگال باشد، آنگاه نگاشت های متعارف $\beta S \to WAP(S) \to AP(S) \to SAP(S)$ همسانریختی هستند. اگر نیم گروه نیم توپولوژیک S شامل یک زیر گروه چگال و مربع بطور شمارش پذیر فشرده $S \times S$ باشد، آنگاه نگاشت های متعارف $\beta S \to WAP(S) \to AP(S) \to SAP(S)$ همسانریختی هستند. فضای توپولوژیک X بطور باز تجزیه پذیر است اگر برای هر نگاشت پیوسته $f : X \to Y$ به فضای شمارش پذیر نوع دوم Y، نگاشت باز پیوسته $p : X \to Z$ بتوی فضای شمارش پذیر نوع دوم Z و نگاشت پیوسته $g : Z \to Y$ موجود باشند بطوریکه $f = gop$. فضای توپولوژیک X بطور ضعیف لیندلف است اگر هر پوشش باز U از X شامل زیر گردایه شمارش پذیر $V \subset U$ باشد بطوریکه اجتماع $\cup V$ چگال در X باشد. برای هر نیم گروه توپولوژیک بطور باز تجزیه پذیر S دارای مربع بطور ضعیف لیندلف $S \times S$، عمل نیم گروه $S \times S \to S$، به عمل نیم گروه پیوسته $\upsilon S \times \upsilon X \to \upsilon S$ تعریف شده روی کامل سازی هوویت υS از S توسیع پیدا می کند. برای هر نیم گروه توپولوژیک بطور باز تجزیه پذیر فشرده نما S با مربع بطور ضعیف لیندلف نگاشت های متعارف $\beta S \to WAP(S) \to AP(S)$ همسانریختی هستند. فرض کنیم $p : X \to Z$ یک نگاشت از فضای تیخونوف به فضای شمارش پذیر نوع دوم باشد و فرض کنیم نگاشت $\upsilon p : \upsilon X \to \upsilon Z$ توسیع پیوسته آن به کامل سازی هوویت از X باشد. نگاشت υp پوشا (باز) است اگرو تنها اگر نگاشت p چنین باشد. کامل سازی هوویت υX از فضای تیخونوف X بطور باز تجزیه پذیر است اگر و تنها اگر فضای X چنین باشد. فشرده

سازی استون-چخ βX از فضای تیخونوف X بطور باز تجزیه پذیر است اگر و تنها اگر X فشرده نما و بطور باز تجزیه پذیر باشد. طیف تعریف شده به صورت $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\gamma, A\}$:

۱) پیوسته است اگر برای هر زنجیر $B \subset A$ داشته باشیم $\sup\beta = \mathrm{supB}$ و نگاشت $\lim_{\alpha\in B}\pi_\alpha^\beta : X_\beta \to \lim S|B$ یک همسانریختی باشد؛

۲) باز است اگر تصویر های $\pi_\alpha^\gamma : X_\gamma \to X_\alpha$ برای هر $\alpha \le \gamma$ در A باز و پوشا باشند؛

۳) W-جهت دار است مشروط به اینکه مجموعه اندیس های A نیز چنین باشد؛

۴) W-طیف است اگر W-جهت دار و برای هر $\alpha \in A$ فضای X_α، شمارش پذیر نوع دوم باشد؛

۵) فاکتور پذیر است اگر هر نگاشت پیوسته $f : \lim S \to R$ را بتوانیم به صورت $f = f_\alpha o \pi_\alpha$ برای $\alpha \in A$ و نگاشت پیوسته $f_\alpha : X_\alpha \to R$ بنویسیم.

زیر فضای X از فضای توپولوژیک Y، C-نشاننده در Y است اگر هر تابع پیوسته $f : X \to R$ را به تابع پیوسته $\overline{f} : Y \to R$ توسیع دهیم.

نتایج

فرض کنید $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\gamma, A\}$ یک W-طیف باشد و $X \subset \lim S$ یک زیر فضای بطور ضعیف لیندلف از حد خود باشد بطوریکه برای هر $\alpha \in A$ تحدید های $\pi_\alpha|X : X \to X_\alpha$ از تصویرهای حد باز و پوشا باشد آنگاه هر نگاشت $f : X \to Y$ به فضای شمارش پذیر نوع دوم Y می تواند برای هر $\alpha \in A$ و نگاشت $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ می تواند به صورت $f = f_\alpha o \pi_\alpha|X$ نوشته شود. بصورت خاص، X یک C-نشاننده در $\lim S$ است و از اینرو $\lim S$ یک کامل سازی هوویت از X است. فضای توپولوژیک X بطور باز تجزیه پذیر (بطور ضعیف لیندلف) است (اگر و) تنها اگر X یک زیر فضای چگال از فضای حدی $\lim S$ مربوط به W-طیف باز $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\gamma, A\}$ باشد بطوریکه برای هر $\alpha \in A$ تحدید $\pi_\alpha|X : X \to X_\alpha$ از تصویر حدی، باز و پوشا باشد. فرض کنید X و Y دو فضای بطور باز تجزیه پذیر باشند. اگر حاصلضرب $X \times Y$ بطور ضعیف لیندلف باشد آنگاه

۱) حاصلضرب $X \times Y$ بطور باز تجزیه پذیر است؛

۲) هر نگاشت پیوسته $f : X \times Y \to Z$ به توی فضای تیخونوف Z به نگاشت پیوسته

$$\overline{f} : vX \times vY \to vZ$$

توسیع می یابد.

مراجع

[۱] E.A. Reznichenko، Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups، Topology Appl. ۵۹:۳ (۱۹۹۴)، ۲۳۳—۲۴۴.

[۲] W. Ruppert، Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory، LNM ۱۰۷۹، Springer، ۱۹۸۴.

[۳] R. Engelking، General Topology، Warsaw، PWN، ۱۹۷۷.

[۴] T. Banakh، S. Dimitrova، O. Gutik، Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups، preprint (arXiv:۰۸۱۱.۴۲۷۶).

[۵] E.A. Reznichenko، V.V. Uspenskij، Pseudocompact Mal’tsev spaces، Topology Appl. ۸۶:۱ (۱۹۹۸)، ۸۳–۱۰۴.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Complete Lift for Semisprays on Infinite Dimensional Manifolds

A. Suri, Academic member of Group of Mathematics,
Faculty of science, Bu Ali Sina University, Hamedan, Iran. email: a.suri@basu.ac.ir
S. Rastegarzadeh, M. Sc. student of Group of Mathematics,
Faculty of science, Bu Ali Sina University, Hamedan, Iran. email: s.rastegarzadeh.91@basu.ac.ir

Abstract: In this paper for a given Banach, possibly infinite dimensional, manifold M we focus on its iterated tangent bundle T^rM, $r \in N \cup \{\infty\}$. First we endow T^rM with a canonical atlas using that of M. Then the concepts of vertical and complete lifts for fuctions and vector fields on T^rM are defined which they will play an pivotal rule in our next studies i.e. complete lift of sprays. Afterward we supply $T^\infty M$ with a generalized Fréchet manifold structure and we will show that any vector field (spray or connection) on T^iM, $i \in N$, can be lifted to a vector field (spray or connection respectively) on $T^\infty M$. Finally, despite of the natural difficulties with non-Banach modelled manifolds, we will discuss about the ordinary differential equations on $T^\infty M$ including integral curves and geodesics.

Keywords: Vertical and complete lift, spray, geodesic, connections, Fréchet manifolds, Banach manifold.

References

[1] R.Abraham, T. Ratiu, J.E. MarsdenManifolds, Tensor Analysis, and Applications, Springer-Verlag Publishing Company, 2007, p. 631.

[2] I. Bucataru and M.F. Dahl, "k-parameter geodesic variations", J. Geom. Phys. Vol. 62, 2012, pp. 2121-2132.

[3] I. Bucataru, M.F. Dahl, "A complete lift for semisprays", Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 7 (2) ,2010, pp.267-287.

[4] C.T.J. Dodson and G.N. Galanis, "Second order tangent bundles of infinite dimensional manifolds", J. Geom. Phys., 52, 2004, pp. 127-136.

[5] I. Bucataru, "Linear connections for systems of higher order differential equations", Houston J. Math. 31 (2), 2005, pp. 315-332.

[6] G.N. Galanis, "Differential and Geometric Structure for the Tangent Bundle of a Projective Limit Manifold", Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, Vol. 112, 2004, pp. 103-115.

[7] R.S. Hamilton, "The inverse functions theorem of Nash and Moser" Bull. of Amer. Math. Soc., 7, 1982, pp. 65-222.

[8] S. Lang, Fundumentals of differential geometry,Graduate Texts in Mathematics, vol. 191, Springer-Verlag, New York, 1999.

[9] R. Miron, The geometry of higher order Lagrange spaces applications to Mechanics and Physics, Kluwer Academic publishers, 1997.

[10] A. Suri, "On the geometry of double tangent bundles of Banach manifodls", J. Geom. Phys., Vol. 74, 2013, pp. 91-100.

[11] J. Vilms, "Connections on tangent bundles", J. Diff. Geom. 41, 1967, pp. 235-243.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Fuzzy topological generalized groups

N. Ebrahimi, Academic member of Shahid Bahonar University of Kerman,
Shahid Bahonar University of Kerman, n_ebrahimi@uk.ac.ir

Z. Nazari*
Ph. D. student

Abstract: In this paper the concept of fuzzy topological generalized group and fuzzy topological generalized quotient space are defined and it is shown that if the membership function of the normal subgroup N of a fuzzy topological generalized group G is constant then G/N is a fuzzy topological generalized group too.
Keywords: Generalized group, Generalized topological group, fuzzy topology, quotient space, fuzzy group.

1 INTRODUCTION

The concept of generalized group is defined by Prof Molaei in [?]. In this paper the concept of fuzzy generalized group is introduced. Let us recall some basic definitions which are used through this paper.

Let X be a non empty set and $I = [0, 1]$. A fuzzy set A in X is characterized by a membership function μ_A which associates with each $x \in X$ its grade of membership $\mu_A(x) \in I$.

Definition 1.1. Let A and B be fuzzy sets in X. Then:

- $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$, for all $x \in X$,
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, for all $x \in X$,
- $C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, for all $x \in X$,
- $D = A \cap B \Leftrightarrow \mu_D(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, for all $x \in X$.

Remark 1.1. For a family of fuzzy sets $\{A_i, i \in I\}$, the union $C = \bigcup_{i \in I} A_i$ and the intersection $D = \bigcap_{i \in I} A_i$, are defined by $\mu_C(x) = sup\mu_{A_i}(x), \quad x \in X$, $\mu_D(x) = inf\mu_{A_i}(x), \quad x \in X$.

We denote by k_c the fuzzy set in X with membership function $\mu_{k_c}(x) = c$ for all $x \in X$. The fuzzy set k_1 and k_0 correspond to X and $\emptyset$, respectively.

Definition 1.2.[?] Let f be a mapping from a set X to a set Y. Let B be a fuzzy set in Y with the membership function μ_B. then the inverse image of B, $f^{-1}[B]$, is the fuzzy set in X with the membership function defined by

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_B(f(x)), \text{ for all } x \in X.$$

If A is a fuzzy set in X then the image of A, $f[A]$, is a fuzzy set in Y with the membership function defined by

$$\mu_{f[A]}(y) = sup_{z \in f^{-1}(y)} \mu_A(z),$$

if $f^{-1}(y)$ is nonempty and 0 otherwise.

Definition 1.3.[?] A fuzzy topology on a set X is a family τ of fuzzy sets which satisfies the following conditions:

- For all $c \in I$, $k_c \in I$,
- If A, $B \in \tau$, then $A \cap B \in \tau$,

*Corresponding Author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

- If $A_i \in \tau$ for all $i \in I$, then $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

The pair (X, τ) is called a fuzzy topological space.

Definition1.4.[?] Let A be a fuzzy set in X and τ a fuzzy topology on X. Then the induced fuzzy topology on A is the family of fuzzy subsets of A which are the intersection with A of τ- open fuzzy sets in X. The induced fuzzy topology is denoted by τ_A.

Definition 1.5.[?] A generalized group is a non-empty set G admitting an operation called multiplication, subject to the set of rules given below:

- $(xy)z = x(yz)$, for all $x, y, z \in G$;
- for each x in G there exists a unique z in G such that $xz = zx = x$ (we denote z by $e(x)$);
- For each $x \in T$ there exists $y \in T$ such that $xy = yx = e(x)$ (we denote y by x^{-1}).

2 Fuzzy topological generalized groups

Definition 2.1. Let X be a generalized group and G be a fuzzy set in X with membership function μ_G. Then G is called a fuzzy generalized group if and only if the following conditions satisfied:

i) $\mu_G(xy) \geq min\{\mu_G(x), \mu_G(y)\}$, for all $x,\ y \in X$.

$\mu_G(x^{-1}) \geq \mu_G(x)$, for all $x \in X$.

It is an immediate consequence of the above definition that $\mu_G(x) = \mu_G(x^{-1})$ and $\mu_G(e(x)) \geq \mu_G(x)$ for all $x \in X$.

Definition 2.2. Let X be a generalized group and τ a fuzzy topology on X. Let G be a fuzzy group in X and let G be endowed with the induced fuzzy topology τ_G. G is called a fuzzy generalized topological group if the multiplication and inverse maps are relatively fuzzy continuous.

Definition 2.3.[?] A generalized subgroup N of a generalized group G is called a generalized normal subgroup of G if there exists a generalized group S and a morphism $f : G \to S$ such that,

$$(\forall a \in G)(N_a = \emptyset \ or \ N_a = ker f_a).$$

where $N_a := N \cap e^{-1}(e(a))$ and $f_a := f|_{e^{-1}(e(a))}$.

Theorem 2.1. [?] Let N be a normal generalized subgroup of X and let $e(X)$ be finite. Then $\Gamma_N = \{a \in T | N_a \neq \emptyset\}$ is an open generalized subgroup of X.

With the assumption of theorem the topology of Γ_N is

$\{V : V \cap e^{-1}(e(a))$ is open in $e^{-1}(e(a))$ for all $a \in \Gamma_N\} \cup \{\Gamma_N\}$.

and we define a topology on T/N as the form

$\{V : \pi^{-1}(V)$is open in $\Gamma_N\}$,

where $\pi : \Gamma_N \to T/N$ defined by $\pi(x) := xN_x$.

Theorem 2.2.[?] With the above assumption there is a unique topological structure on T/N such that $\pi : \Gamma_N \to T/N$ is homeomorphism. Moreover T/N with this topology is a topological generalized group.

The proof of the following theorem is similar to what we have for fuzzy groups[?].

Theorem 2.3. Let X be a generalized group having fuzzy topology τ and let G a fuzzy topological generalized group in X. Let N be a normal subgroup of X and X/N be given the fuzzy topology which is induced from τ under the canonical homomorphism π. Then, if the membership function μ_G of G is constant on N, the quotient fuzzy generalized group G/N is a fuzzy topological generalized group in X/N.

Proof. Since the membership function μ_G of G is constant on N, μ_G is π-invariant. $G/N = \pi[G]$ is a fuzzy generalized group. We have to show that the map $(\pi[G], U_{\pi[G]}) \times (\pi[G], U_{\pi[G]}) \to (\pi[G], U_{\pi[G]})$, which is defined by $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2^{-1}$ is relatively fuzzy continuous. If $V \in \tau$, then $\pi[V] \in U$, since $\pi^{-1}[\pi[U]]$ is the union of fuzzy open sets and consequently is open. Hence π is fuzzy open. It follows that π is relatively fuzzy open, since if $V' \in \tau_G$, there exists $V \in \tau$ such that $V' = V \cap G$ and by the

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

π invariance of μ_G, $\pi[V'] = \pi[V] \cap \pi[G] \in U_{\pi[G]}$. Hence $\pi \times \pi$ is relatively fuzzy open mapping of $(G, \tau_G) \times (G, \tau_G)$ into $(\pi[G], U_{\pi[G]}) \times (\pi[G], U_{\pi[G]})$. Let V' be an open fuzzy set in $U_{\pi[G]}$. The membership function of $(\pi \times \pi)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']]$ is given by

$$\mu_{(\pi\times\pi)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']]}(x_1, x_2) = \mu_{V'}(\pi(x_1), (\pi(x_2))^{-1}) =$$

$$\mu_{\gamma_X^{-1} o \pi^{-1}[V']}(x_1, x_2),$$

for all $(x_1, x_2) \in X \times X$, where $\gamma_X(x_1, x_2) = x_1 x_2^{-1}$. γ_X is a relatively continuous mapping of $(G, \tau_G) \times (G, \tau_G)$ into (G, τ_G), and π is a relatively continuous mapping of (G, τ_G) in to $(\pi[G], U_{\pi[G]})$. Hence by the π invariance of μ_G,

$$(\pi \times \pi)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V'] \cap (\pi[G] \times \pi[G])] =$$
$$(\pi \times \pi)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']] \cap (G \times G)$$

is open in the induced fuzzy topology on $G \times G$. As $\pi \times \pi$ is relatively fuzzy open,

$$(\pi \times \pi)(\pi \times \pi)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V'] \cap (\pi[G] \times \pi[G])] =$$
$$\gamma_Y^{-1}[V'] \cap (\pi[G] \times \pi[G])$$

is open in the induced fuzzy topology on $\pi[G] \times \pi[G]$.

References

[1] D. H. Foster, "Fuzzy topological groups," J. Math. Anal. Appl, 67(2), pp. 549- 564, 1979.

[2] M. R. Molaei and A. Tahmoresi, "Connected topological generalized groups," Gen. Math, 12(1), pp. 13-22, 2004.

[3] M.R. Molaei, "Generalized Groups," International conference on Algebra," Romania. October 14-17 1998 Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi, Tomul XLV(XLIX)., pp. 21-24.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۷ - ٤ شهریور ۱۳۹۳

هندسه دیفرانسیل زیر خمینه هایی با حاصلضرب تابدار منیفلدهای $I \times_f S^{m-1}(k)$

الهه جمی، دانشگاه پیام نور تبریز، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی، Edi_jami_83@yahoo.com
(فارغ التحصیل کارشناسی ارشد)

چکیده: ابتدا یک مطالعه‌ی کلی از زیر خمینه‌ها در $R^m(k,f) := I \times_f S$ که حاصلضرب تابدار یک بازه‌ی I و یک منیفلد ریمانی S با انحنای مقطعی ثابت k است رادر نظر می‌گیریم. برخی از قضیه‌های مربوط به زیر خمینه‌های کلاً نافی در $R^m(k,f)$ طبقه‌بندی و ثابت شده‌اند. مقاله‌های زیادی وجود دارند که به مطالعه‌ی زیرخمینه‌ها در خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت بدلیل سادگی تانسور انحناها، پرداخته‌اند. همچنین مقالات متعددی اخیراً در مورد زیرخمینه‌ها در حاصلضرب ریمانی خمینه‌های $R \times S^n$ و $R \times H^n$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در مقابل تا آنجا که ما مطالعه کردیم وجود ندارد مقالاتی که به مطالعه‌ی کلی از خمینه‌ها با حاصلضرب تابدار ریمانی خمینه $R^m(k,f)$ پرداخته باشد. از اینرو هدف این مقاله آماده کردن یک مطالعه کلی از خمینه‌ها در $R^m(k,f)$ با انحنای مقطعی غیر ثابت از دیدگاه هندسه دیفرانسیل می‌باشد.

کلمات کلیدی: حاصلضرب تابدار، زیر خمینه‌های کلاً نافی، انحنای پایای زیرخمینه‌ها.

مقدمه

خانواده‌ای مهم از مدل‌های کیهان شناسی در نسبیت کلی، خانواده‌ای از نوع رابرتسون والکر می‌باشد.

$$L_1^4(k,f) := (I \times S, g_f^{-k}), \quad g_f^{-k} = -dt + f^2(t)g_k \tag{1}$$

با یک حاصلضرب تابدار متریک لورنتزین g_f^{-k} که روی حاصلضرب یک بازه‌ی باز I و یک ۳- خمینه ریمانی (S,g_k) با انحنای مقطعی ثابت k تعریف می‌شود.
خانواده‌ی مهم دیگری از حاصلضرب تابدار، خانواده‌ای از حاصلضرب تابدار ریمانی می‌باشد:

$$R^m(k,f) := (I \times S, g_f^k), \quad g_f^k = dt + f^2(t)g_k \tag{2}$$

که f یک تابع مثبت روی I و (S,g_k) همچون در (۱) می‌باشد.
انتخاب‌های استاندارد برای S بترتیب $H^{m-1}(-1)$، E^{m-1} و $S^{m-1}(1)$ با انحنای ۱، ۰ و ۱− هستند. در این مقاله فرض بر این شده که $R^m(k,f)$ شامل هیچ زیر مجموعه‌ی باز با انحنای ثابت نیست.
ویژگی‌های اساسی زیر خمینه‌ها در $R^m(k,f)$ عبارتند از:

۱) تراگرد (تقاطع) و H-زیرخمینه‌ها از $R^m(k,f)$

۲) زیرخمینه‌های مینیمال از $R^m(k,f)$

۳) طبقه‌بندی زیرخمینه‌های توازی در $R^m(k,f)$

۴) زیرخمینه‌های کلاً نافی در $R^m(k,f)$

چون زیرخمینه‌های کلاً نافی در خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت شناخته شده‌اند در این بخش ما فقط مطالعه می‌کنیم زیرخمینه‌های کلاً نافی در $R^m(k,f)$ که لزوماً ثابت نیستند.

قضیه: اگر $R^m(k,f)$ شامل هیچ مجموعه‌های باز با انحنای ثابت نباشد آنگاه یک زیر خمینه M در $R^m(k,f)$ کلاً نافی است با $DH=0$ اگر و فقط اگر هر کدام از دو مورد

۱) M در یک قطعه‌ای از $S(t_0)$ بعنوان یک زیرخمینه کلاً نافی با بردار انحنای میانگین موازی قرار بگیرد یا

۲) M یک H- زیرخمینه‌ی کلاً ژئودزیک از $R^m(k,f)$ می‌باشد.

گزاره: فرض کنید که $R^m(k,f)$ شامل هیچ مجموعه‌های باز با انحنای ثابت نباشد آنگاه یک زیرخمینه M از $R^m(k,f)$ کلاً نافی با انحنای میانگین ثابت است اگر و فقط اگر یکی از دو مورد برقرار می‌باشد.

۱) M در یک قطعه $S(t_0)$ بعنوان یک زیرخمینه کلاً نافی با بردار انحنای میانگین موازی قرار می‌گیرد یا

۲) M یک زیرخمینه کلاً نافی از $R^m(k,f)$ است به‌طوری‌که بردار انحنای میانگین H به ∂_t یکامتعامد می‌باشد.

زیرخمینه‌های کلاً نافی خیلی زیادی در $R^m(k,f)$ وجود دارند با انحنای میانگین غیر ثابت از این‌رو $DH\neq 0$، در زیر مثالی را می‌آوریم:

مثال: فرض کنید b یک عدد مثبت باشد، f یک تابع مثبت تعریف شده روی بازه‌ی باز I شامل صفر با $(\ln f)''\neq 0$ روی I و $(t,x_1,\dots,x_m)$ مختصات طبیعی از $I\times E^{m-1}$ باشد و متریک تانسوری از $I\times_f E^{m-1}$ به قرار زیر است.

$$\tilde{g}=dt^2+f^2(t)\sum_{j=2}^{n}dx_j^2 \qquad (3)$$

با در نظر گرفتن ایمرسیون

$$L: I\times R^{n-1}\to R^m(0,f)=I\times_f E^{m-1}$$

تعریف شده بوسیله

$$L(u_1,\dots,u_n)=\left(u_1,\int_0^{u_1}\frac{dt}{f(t)},u_2,\dots,u_n,0,\dots,0\right) \qquad (4)$$

آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} Lu_1 &= \left(1,\frac{b}{f(u_1)},0,\dots,0\right) \qquad (5)\\ Lu_j &= \left(0,\dots,0,\overbrace{1}^{(j+1)-th},0,\dots,0\right)\\ & \qquad 2\leq j\leq n \end{aligned}$$

تانسور متریک روی $I\times R^{n-1}$ القا شده از $R^m(0,f)$ بر طبق L داده می‌شود با

$$g=(1+b^2)du_1^2+f^2(u_1)\sum_{j=2}^{n}du_j^2 \qquad (6)$$

به آسانی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(-b,f^{-1},0,\dots,0) \qquad (7)\\ \xi_r &= \left(0,\dots,0,\overbrace{f^{-1}}^{r-th},0,\dots,0\right)\\ & \qquad r=n+2,\dots,m \end{aligned}$$

که میدان‌های برداری یکامتعامد روی M در $R^m(k,f)$

هستند با بکارگیری (۳)، (۵) و (۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\partial_{u_1}}\partial_{u_1} &= \frac{bf'^{۲}}{f^{۲}}(\partial_{x_{۲}} - bf\partial_t) = \frac{b\sqrt{۱+b^{۲}}f'}{f}\xi_{۱},\\
\tilde{\nabla}_{\partial_{u_j}}\partial_{u_j} &= -ff'\partial_t\\
&= \frac{ff'}{۱+b^{۲}}\left(b\sqrt{۱+b^{۲}}\xi_{۱} - \partial_{u_1}\right),\\
&\qquad j = ۲,\dots,n, \qquad (۸)\\
\tilde{\nabla}_{\partial_{u_1}}\partial_{u_j} &= \frac{f'}{f}\partial_{u_j}, \qquad ۲ \le j \le n,\\
\tilde{\nabla}_{\partial_{u_i}}\partial_{u_j} &= ۰, \qquad ۲ \le j \le n.
\end{aligned}$$

از این‌رو دومین فرم اساسی از L کلاً نافی در $R^m(k,f)$ است که بردار انحنای میانگین داده می‌شود با

$$h(X,Y) = \frac{bf'}{\sqrt{۱+b^{۲}}f}\xi\langle X,Y\rangle \qquad (۹)$$

از این‌رو L دارای انحنای میانگین غیر ثابت است از طرفی داریم $Dh \neq ۰$.

نتیجه: هر زیرخمینه کلاً نافی M در $R^m(k,f)$ التصاق نرمال صاف دارد برای مثال $R^D = ۰$.

نتایج تکمیلی در مقاله کامل قابل ارایه می‌باشد.

مراجع

[1] B. Y. Chen, Geometry of Submanifold, Mercel Deker, New York, 1973.

[2] Y. Chen, Geometry of Submanifold and its Aplications, Scince University of Tokyo, 1981.

[3] B. ONeill, Semi-Rimannian Geometry with Applications to relativity, Academic press, New York, 1982.

[4] B. Y. Chen, Rimannian of Submanifold, in: Hand book of Differential Geometry, vol. 1, F. Dillen and L. Verstr aelen, Eds., North Holland, Amsterdam, 2000, pp. 187-418.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

پیوستگی حاصل ضرب گروه توپولوژیکی

چکیده: فرض کنید G یک فضای متریک باشد که گروه نیز هست. اگر x و y در G باشند، تابع xy در فضای حاصلضرب $G \times G$ تعریف شده است که اغلب به طور همزمان در هر دو متغیر پیوسته می باشد. اما نشان می دهیم در بسیاری از موارد، پیوستگی همزمان از پیوستگی متغیر ها به صورت جداگانه نتیجه می شود. در واقع برای گرو ه های جدایی پذیر می توان نشان داد که پیوستگی معکوس ار پیوستگی نگاشت xy نسبت به متغیر های x و y به صورت جداگانه نتیجه می شود. در واقع برای گروه های جدایی پذیر می توان نشان داد که پیوستگی معکوس از پیوستگی نگاشت xy نسبت به متغیرهای x و y به صورت جداگانه نتیجه می شود.
کلمات کلیدی: گروه توپولوژیکی، پیوستگی همزمان، پیوستگی جداگانه.

مقدمه

یکی از مباحثی که در توپولوژی نقطه‌ـ‌مجموعه مطرح شده است، مفهوم گروه های توپولوژیک و پیوستگی گروه های توپولوژیک می باشد. در این راستا اشخاص مختلفی نشان دادند که یک گروه جبری G همراه با شرایطی معین، یک گروه توپولوژیک است. به عنوان مثال می توان نشان داد که اگر G جدایی پذیر، انتقال های راست پیوسته و انتقال های چپ خاصیت بئر داشته باشند آنگاه G یک گروه توپولوژیک خواهد بود همچنین می توان ثابت کرد هر گروه نیم توپولوژیک موضعاً فشرده نیز یک گروه توپولوژیک است. هم اکنون زمینه و نتایج مورد تحقیق در این باب بسیار زیاد است که برای فضاهای متریک پذیر و متریک ناپذیر قابل بحث خواهد بود.

بخش یک

تعریف ۱: گروه توپولوژيکي G گروهي جبري است که فضاي توپولوژيك نیز باشد، با این شرط که نگاشت هاي ضرب $g_1 : G \times G \to G$ که $(x, y) \mapsto x.y$ و وارون $g_2 : G \to G$ که $x \mapsto x^{-1}$ پیوسته باشند.

تعریف ۲ : اگر G یک فضای توپولوژیک باشد، نگاشت $g_1 : G \times G \to G$ که $(x, y) \mapsto x.y$ در هر دو متغیر x و y به طور همزمان پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر همسایگی W از $x.y$ یک همسایگی U از x و یک همسایگی V از y موجود باشد به طوری که $UV \subset W$.

تعریف ۳ : اگر G یک فضای توپولوژیک باشد، نگاشت $g_1 : G \times G \to G$ که $(x, y) \mapsto x.y$ نسبت به متغیر x پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه

باز W شامل $x.y$ ، مجموعه بازی مانند U شامل x باشد به طوری که $Uy \subset W$.

قضیه ۱: اگر G موضعاً کامل و xy در هر متغیر بطور جداگانه پیوسته باشد آنگاه در هر دو متغیر بطور همزمان پیوسته است.

لم ۲: اگر H یک زیرمجموعه باز در G و ϵ یک عدد مثبت باشد آنگاه زیرمجموعه باز H_1 از H و یک عدد مثبت δ وجود دارد به طوری که برای هر $h \in H_1$ و هر $a \in G$ ، $d(a,e) < \delta$ ایجاب کند که $d(ah,h) \leq \epsilon$.

قضیه ۳ : اگر G کامل و جدایی پذیر باشد و اگر xy به طور جداگانه در x و y پیوسته باشد آنگاه x^{-1} پیوسته است.

لم ۴ : اگر G کامل و جدایی پذیر باشد و اگر xy در هر متغیر به طور جداگانه پیوسته باشد و x^{-1} یک تابع بئر باشد آنگاه x^{-1} پیوسته است.

References

[1] A. Bouziad, “The Ellis theorem and continuity in groups”, Topology Appl, 50 (1993) 73-80.

[2] A. Bouziad, “Continuity of separately continuous group actions in p-spaces ”, Topology Appl, 71 (1996) 119-124.

[3] R. Ellis, “Locally compact transformation groups” Duke Math. 39 (1982) 241-245.

[4] Petar S. Kendrov and Ivaylo S. Kortezov, “Topological games and topological groups” Topological and its applications 109 (2001) 157-165.

[5] D. Montgomery, “Continuity in topological groups” Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936) 879-882.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Representation of Generalized Lie Groups

M. R. Farhangdoost*, Academic member of Shiraz University, Department of Mathematics, College of Sciences,
Shiraz University, P.O. Box 71457- 44776, Shiraz, Iran
E-Mail: farhang@shirazu.ac.ir
S. Merati , Ph. D. student, Department of Mathematics, College of Sciences,
Shiraz University, P.O. Box 71457- 44776, Shiraz, Iran
A. R. Armakan , Ph. D. student, Department of Mathematics, College of Sciences,
Shiraz University, P.O. Box 71457- 44776, Shiraz, Iran

Abstract: In this paper, using an action of top spaces on a smooth manifold, we define a representation of a top space. Also we show that there is a Haar measure on a top space, and prove that any finite dimensional representation of a top space is unitary, and then it is a semisimple representation.
Keywords: generalized Lie groups,action on manifolds, representation.

1 INTRODUCTION

Lie groups represent the best-developed theory of continuous symmetry of mathematical objects and structures, which makes them indispensable tools for many parts of contemporary mathematics, as well as for modern theoretical physics.[4] [9]
The notion of a top space was first introduced by M. R . Molaei in 1998, [3]. This structure encounters two mathematical objects of algebra and geometry. Algebraic structure of this concept is generalized group. Now we recall definition of a generalized group.

Definition 1.1. [3] A generalized group is a non-empty set Gr admitting an operation called multiplication which satisfies the following conditions:

i. $(g_1.g_2).g_3 = g_1.(g_2.g_3)$, for all $g_1, g_2, g_3 \in Gr$.

ii. For each $g \in Gr$ there exists a unique $e(g)$ in Gr such that $g.e(g) = e(g).g = g$.

iii. For each $g \in Gr$ there exists $h \in Gr$ such that $g.h = h.g = e(g)$.

In this paper by $e(Gr)$ we mean

$$\{e(g) : g \in Gr\}.$$

For any generalized group T, and any $t \in T$

$$e^{-1}(e(t)) = \{s \in T | e(s) = e(t)\}$$

has a canonical group structure. If $e(t)e(s) = e(ts)$ for all $t, s \in T$ then $e(T)$ is an idempotent semi-group with this product.

A top space is a smooth manifold which its points can be (smoothly) multiplied together and generally its identiy is a map, i.e.

Definition 1.2. [1] A top space T is a Hausdorff d-dimensional differentiable manifold which is endowed with a generalized group structure such that the generalized group operations:

i. $. : T \times T \to T$ by $(t_1, t_2) \mapsto t_1.t_2$;

*Corresponding Author

ii. $^{-1} : T \to T$ by $t \mapsto t^{-1}$;
are differentiable and it holds

iii. $e(t_1.t_2) = e(t_1).e(t_2)$, for all $t_1, t_2 \in T$.

2 ACTION OF TOP SPACES ON MANIFOLDS

For a smooth manifold M, the set of all smooth functions from M to M such that their restriction to a submanifold of M is a diffeomorphism i.e. partial diffeomorphisms of M is denoted by $D_P(M)$.

Definition 2.1. An action of a top space T on a smooth manifold M is a map $\phi : T \to D_P(M)$ which satisfies the following conditions:

i. The map $T \times M \to M$ which maps (t, m) to $\phi_t(m)$ is a smooth function;

ii. $\phi_{ts} = \phi_t \circ \phi_s$, for all $t, s \in T$.

Now by using the following theorem, we give an example of the definition above.

Theorem 2.2. *Let T be a generalized group such that $e(t)e(s) = e(ts)$, for any $t, s \in T$. Then there is a generalized group isomorphism between T and $e(T) \ltimes \{G_i\}_{i\in e(T)}$, where $G_i = e^{-1}(i)$, for all $i \in e(T)$ and*

$$S \ltimes \{G_i\}_{i\in e(T)} = \{(i, g)|g \in G_i\}$$

.

Proof. suppose $S = \{e(t)|t \in T\}$, $G_i = e^{-1}(i)$ for all $i \in S$ and $f : T \to S \ltimes \{G_i\}_{i\in S}$ such that $f(t) = (e(t), t)$. It is easy to show that f is a generalized group isomorphism. □

Example 2.3. *For a top space T,*

$$Ad : T \to D_P(M)$$

where $Ad_t(s) = e(s)tst^{-1}e(s)$ is an action of top spaces on manifolds which is called adjoint action.

Definition 2.4. If G is a Lie group and M be a smooth manifold, a partial action of G on M is a map

$$\varphi : G \to D_P(M)$$

such that the map $G \times M \to M$ is a smooth function and $\varphi^{gh} = \varphi^g \circ \varphi^h$, for all $g, h \in G$.

Theorem 2.5. *Let T be a top space. Then ϕ is an action of T on M if and only if there exists a family of partial actions $\{\varphi_i\}_{i\in e(T)}$ of $e^{-1}(i)$ on M, for any $i \in e(T)$, such that $\varphi^{ts}_{e(ts)} = \varphi^t_{e(t)} \circ \varphi^s_{e(s)}$ and $\phi_t = \varphi^t_{e(t)}$, for all $t, s \in T$.*

Proof. Let ϕ be an action of top space T on M and $\varphi_{e(t)} = \phi\ |_{e^{-1}(e(t))}$, for all $t \in T$. Then we know that $\varphi_{e(t)}$ is a partial action of $e^{-1}(e(t))$ on M. Since $\varphi^t_{e(t)} = \phi\ |_{e^{-1}(e(t))}\ (t) = \phi_t$, we have $\varphi^{ts}_{e(ts)} = \phi(st) = \phi_s \circ \phi_t = \varphi^t_{e(t)} \circ \varphi^s_{e(s)}$ also $\phi_t = \varphi^t_{e(t)}$.
Conversely, assume that there exists a family of partial actions $\{\varphi_i\}_{i\in e(T)}$ of $e^{-1}(i)$ on M, such that $\varphi^{ts}_{e(ts)} = \varphi^t_{e(t)} \circ \varphi^s_{e(s)}$, for all $t, s \in T$. Define $\phi : T \to D_P(M)$ such that $\phi_t = \varphi^t_{e(t)}$ for all $t \in T$. Let $t, s \in T$, $\phi_{ts} = \varphi^{ts}_{e(ts)} = \varphi^t_{e(t)} \circ \varphi^s_{e(s)} = \phi_t \circ \phi_s$ and hence ϕ is an action of T on M. □

By theorem (2.5) we have:

Example 2.6. *Let T be a top space. Then*

$$L : T \to D_P(T)$$

where $L_t(s) = e(s)tse(s)$ is an action of T on T, that is called left action of T.

A vector field X on T is called partially left invariant if $(L_{*t}(X))_s = X_{L_t(s)}$.

Example 2.7. *Any partially left invariant vector field on T, is a left invariant vector field on $e^{-1}(e(t))$ for all $t \in T$.*

3 REPRESENTATION OF TOP SPACES

Closely related with the notion of a top space acting on a manifold is the notion of a representation. Let us begin with the definition of a partial representation of a Lie group.

Definition 3.1. A partial representation of a Lie group G is a vector space V together with a semigroup morphism $\rho : G \to L(V)$ such that

$$\rho(g) : V \to V$$

is an isomorphism on some nonzero subspace of V.

Definition 3.2. A representation of a top space T, is a vector space V together with a morphism $\rho : T \to L(V)$ such that V together with

$$\rho\,|_{e^{-1}(e(t))} : e^{-1}(e(t)) \to L(V)$$

is a partial representation, for all $e(t) \in e(T)$. For a complex vector space V, a representation of V is called a complex representation.

A subspace W of a representation V is called a subrepresentation, when $\rho(t)(W) \subset W$, for all $t \in T$. If V has no non-trivial subrepresentations then V is called a simple representation.

A representation of T is called semisimple if it is isomorphic to a direct sum of simple representations.

Definition 3.3. A complex representation V of a top space T is called unitary if there exists a T-invariant inner product, i.e. $(\rho(t)(v), \rho(t)(w)) = (v, w)$ for all $t \in T$.

Theorem 3.4. *Each unitary representation is semisimple.*

Proof. Let V be a unitary representation of top space T. If V is simple, there is nothing left to prove. Suppose V has a subrepresentation W. Then $V = W \oplus W^{\perp}$, and $W^{\perp}$ is a subrepresentation as well. Clearly, if $w \in W^{\perp}$, then $(\rho(t)(w), v) = (w, \rho(t^{-1})(v)) = 0$ for any $v \in W$, so $\rho(t)(w) \in W^{\perp}$. □

Lemma 3.5. *Let V be a one dimensional real partial representation of a compact group G. Then for any $g \in G$, $|\rho(g)| = 1$.*

Proof. It's obvious that, if $|\rho(g)| < 1$, then $\{\rho(g^n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ as $n \to \infty$. But $\rho(G)$ is a compact subset in $\mathbb{R}^*$, so it can not contain a sequence with limit 0. The case $|\rho(g)| > 1$ is similar. □

Theorem 3.6. *Let T be a top space*

i. T is orientable; moreover the orientation can be chosen such that the right action of T on itself preserves the orientation.

ii. If T is compact, then for the partially right invariant orientation on T there exists a partially right invariant differential form with the highest degree ω such that $\int_T \omega = 1$.

iii. The differential form ω defined in (ii) is also partially left invariant and invariant up to a sign under $\mathfrak{i} : g \mapsto g^{-1}$.

Proof. i. Let us choose some non-zero element in

$$\bigoplus_{i\in e(T)} \bigwedge^{n} T_i^* e^{-1}(i)$$

where $n = \dim e^{-1}(i)$ for all $i \in e(T)$. Then it can be uniquely extended to a partial right invariant differential form $\tilde{\omega}$ on T [2]. Since this form is non-vanishing on T, T is orientable.

ii. If T is compact, the integral $I = \int_T \tilde{\omega}$ is finite. Define $\omega = \frac{\tilde{\omega}}{I}$. Then ω is partially right invariant and satisfies

$$\int_T \omega = 1.$$

iii. To prove that ω is also partially left invariant, it suffices to check that it is invariant under coadjoint action. Since $\bigwedge^n T_i^* e^{-1}(i)$ is a one dimensional partial representation of $e^{-1}(i)$. Thus, this result immediately follows from [2] and lemma (3.5).

$\square$

Theorem 3.7. *Let T be a compact real top space. Then it has a canonical Borel measure dt which is both partially left and right invariant and invariant under $g \mapsto g^{-1}$ and which satisfies $\int_T dt = 1$. This measure is called the Haar measure on T and is usually denoted by dt.*

Proof. Choose an orientation of T and a bi-invariant volume form ω as in theorem (3.6) Then general results of measure theory imply that there exists a unique Borel measure dt on T such that for any continuous function f, we have

$$\int_T f dt = \int_T f\omega.$$

Invariance of dt under left and right actions and under $g \mapsto g^{-1}$ follows from invariance of ω. $\square$

Theorem 3.8. *Any finite dimensional complex representation of a compact top space is unitary.*

Proof. Let $B(v, w)$ be some positive definite inner product in finite dimensional complex representation V

$$\tilde{B}(v, w) = \int_T B(\rho(t)(v), \rho(t)(w))dt$$

where dt is the Haar measure on T. Then $\tilde{B}(v, v) > 0$ (it is an integral of a positive function) and right invariance of Haar measure shows that $\tilde{B}(\rho(t)v, \rho(t)(w)) = \tilde{B}(v, w)$. $\square$

Hence by theorem (3.4) any finite dimensional complex representation of a compact top space is semisimple.

References

[1] M. R. Farhangdoost: *Action Of Generalized Lie Groups On Manifolds*, Acta Math, Volume LXXX, 2 (2011).

[2] M. R. Farhangdoost, S. Merati, A. R. Armakan, *Invariance of representations of top space*, to appear 2014.

[3] M.R. Molaei, *Top spaces*, Journal of Interdisciplinary Mathematics,Volume 7, 2 (2004), 173-181.

[4] R. Bryant, *An introduction to Lie groups and symplectic geometry, in :Geometry and Quantum field theory*, Ed. Freed-Uhlenbeck, IAS Park City Mathematics Series Vol 1.

Books:

[5] C. Procesi: *Lie groups: An Approach through invariants and Representations*, Springer (2005).

[6] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk: *Lie groups*, Springer (2000).

[7] M. R. Molaei, *Mathematical Structures Based on Completely Simple Semigroups*, Hadronic Press, Palm Harbor, USA, 2005.

[8] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations Of Differential Geometry*, Interscince, Volume 1, Num 15 (1963).

[9] T. Brocker-T. tom Diek, *Representation of compact Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1985.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

Evolution of the Weyl curvature under the Finsler Ricci flow

Z. Aral*,"Phd student",
Shahid Bahonar university of Kerman, aral@math.uk.ac.ir
Member of young researchers society of Shahid Bahonar university of Kerman
B. Keshavarz, behnam.keshavarz@yahoo.com
"M. Sc. student"

Abstract: We consider the Finsler Ricci flow $\frac{\partial}{\partial t}F^2 = -2F^2\mathcal{R}ic$, when the Finsler metric evolves, then so does its curvature. In this paper, we drive evolution equations for Ricci scalar function and the Weyl curvature tensor along the Finsler Ricci flow.
Keywords: Ricci flow, Finsler manifold, Berwald metric, Weyl curvature.

1 INTRODUCTION

The geometric evolution equation $\frac{\partial}{\partial t}g = -2Ric$ is known as the un-normalized Ricci flow in Riemannian geometry. The same equation can be used in the Finsler setting, because both the fundamental tensor g_{ij} and Ricci tensor Ric_{ij} have been generalized to that broader framework, albeit gaining a y dependence in the process. Bao in [?] studied Ricci flow equation in Finsler manifolds, whereby to answer Chern's question that, where every smooth manifold admits a Ricci- constant Finsler metric? In the following a scalar Ricci flow equation is introduced according to the Bao's paper. By contracting

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2Ric_{ij} = -2(\frac{1}{2}F^2\mathcal{R}ic)_{y^i y^j}$$

with y^i and y^j gives, via Euler's theorem, $\frac{\partial F^2}{\partial t} = -2F^2\mathcal{R}ic$, that is

$$\frac{\partial logF}{\partial t} = -\mathcal{R}ic, \qquad F(t=0) = F_0$$

This scalar equation directly addresses the evolution of the Finsler metric F, and makes geometrical sense on both the manifold of non zero tangent vectors TM_0 and the manifold of rays. It is suitable as an un-normalized Ricci flow for Finsler manifold. In [?] Azami and Razavi showed that the Ricci flow on Finsler manifolds with Berwald metrics cannot possibly be strictly parabolic then, they defined a manifold flow which is strictly parabolic and using it, they proved the existence and uniqueness for solution of Ricci flow on Finsler manifolds.

*Corresponding Author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

2 Preliminaries

Let M be a connected n-dimensional smooth manifold.Denote by T_xM the tangent space at $x \in M$,and by $TM = \cup_{x\in M} T_xM$ the tangent bundle of M.Any element of TM has the form (x, y), where $x \in M$ and $y \in T_xM$.The natural projection $\pi : TM \to M$ is given by $\pi(x, y) = x$.Denote the pull-back tangent bundle by π^*TM which is

$$\pi^*TM = \{(x, y, v)|\, y \in T_xM_0, v \in T_xM\}$$

and $TM_0 = TM\backslash\{0\}$, $\pi(v) = x$.
A Finsler metric on a manifold M is a function $F : TM \to [0,\infty)$ which has the following properties:

(i) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \ \ \forall\lambda > 0$;

(ii) $F(x, y)$ is C^∞ on TM_0 ;

(iii) For any tangent vector $y \in T_xM$,the symmetric bilinear form $g_y : T_xM \times T_xM \longrightarrow R$ on TM is positive definite,where

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial r}\left[F^2(x, y + su + rv)\right]\Big|_{s=r=0}.$$

We call the indicatrix of the Finsler manifold (M, F) at the point $x \in M$, the set of unit tangent vectors $SM = \{y \in T_xM : F(x, y) = 1\}$.In a local coordinate system (x^i, y^i) we have $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y)$ and $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$.The pair (M, F) is called a Finsler manifold.The geodesics of F are characterized locally by

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i(x, \frac{dx}{dt}) = 0$$

where

$$G^i = \frac{1}{4}g^{il}\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right\}y^jy^k$$

A Finsler metric is called a Berwald metric if the geodesic coefficients $G^i(y)$ are quadratic in $y \in T_xM$ for all $x \in M$,that is,there are local functions $\Gamma^i_{jk}(x)$ on M such that $\Gamma^i_{jk}(x) = \Gamma^i_{kj}(x)$ and

$$G^i(y) = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^jy^k$$

where

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{il}\{\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^r}G^r_k \\ &+ \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^r}G^r_l - \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^r}G^r_j\}\end{aligned}$$

and $G^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$. For a Berwald metric we have $\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$.

For a vector field $y \in T_xM_0$,the Berwald connection is a map $\nabla^y : T_xM \times C^\infty(TM) \to T_xM$ defined by

$$\nabla^y_u V := \left\{u\left(V^i\right)(x) + V^j(x)\Gamma^i_{jk}(y)u^k\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$$

where $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x \in T_xM$ and $V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in C^\infty(TM)$.
From now on a vector field $y \in T_xM_0$ we suppose that $\nabla = \nabla^y$. The coefficients of the Riemann curvature $R_y = R^i_k dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$ are given by

$$R^i_k := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k}y^j + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \tag{1}$$

and $R^i{}_{jk} := \frac{1}{3}\left(\frac{\partial R^i{}_j}{\partial y^k} - \frac{\partial R^i{}_k}{\partial y^j}\right)$, $R^i_{j\,kl} := \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 R^i{}_k}{\partial y^j \partial y^l} - \frac{\partial^2 R^i{}_l}{\partial y^j \partial y^k}\right)$.
The Ricci scalar function of F is given by

$$\mathcal{R}ic := \frac{1}{F^2}R^i_i. \tag{2}$$

A companion of the Ricci scalar is the Ricci tensor

$$Ric_{ij} := \left(\frac{1}{2}F^2\mathcal{R}ic\right)_{y^iy^j}. \tag{3}$$

A Finsler metric is said to be an Einstain metric if the Ricci scalar function is a function of x alone,equivalently $Ric_{ij} = R(x)g_{ij}$.

3 Evolution of Weyl curvature under Finsler Ricci flow

Wely tensor is an important Riemannian projective invariant in Finsler geometry because it gives a measure of failure of Finsler metric to be of scalar

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

curvature. A Finsler space (M, F) is called to be of scalar curvature if for any $y \in TM - \{0\}$ the flag curvature $\kappa(P, y)$ is independent of tangent planes P containing y. The flag curvature is a natural extension of the sectional curvature in Riemannian geometry. The trace of flag curvature tensor,i, e. $\sum R_{aa}$, is called Ricci Scalar. Weyl curvature is constructed from flag curvature tensor. It is defined by

$$W_\alpha^\beta = R_\alpha^\beta - \frac{\mathcal{R}ic}{n-1}\delta_\alpha^\beta \tag{4}$$

where$\mathcal{R}ic$ is the Ricci scalar and $n = dim M$.[?]
In this section, we drive evolution equations for Ricci scalar function and the Weyl curvature tensor along the Finsler Ricci flow.

Lemma 3.1. *Under the Finsler Ricci flow,* $\frac{\partial F^2}{\partial t} = -2F^2\mathcal{R}ic$*, the evolution of the curvature tensor* R_k^i *is given by*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_k^i &= (\partial H * \partial g + \partial g * \partial Ric + H * \partial^2 g \\
&+ g * \partial^2 Ric) \\
&+ (\partial H * (\partial g)y + \partial g * (\partial Ric)y \\
&+ H * (\partial^2 g)y + g * (\partial^2 Ric)y)y \\
&+ (H * \partial g + g * \partial Ric)(g * \partial g - \partial g)y^j y^k \\
&+ (g * (\partial g)y)(H * (\partial g)y + g * (\partial Ric)y)
\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_k^i &= 2(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial G^i}{\partial x^k}) - (\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k})y^j \\
&+ 2(\frac{\partial}{\partial t}G^i)\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} + 2G^i(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}) \\
&- (\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial G^i}{\partial y^j})\frac{\partial G^j}{\partial y^k} - i \leftrightarrow j \\
&= I + II + III + IV + V
\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial G^i}{\partial x^k} &= \frac{1}{4}[\frac{\partial H^{il}}{\partial x^k}(2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{jb}}{\partial x^l}) \\
&+ \frac{\partial g^{il}}{\partial x^k}(2\frac{\partial h_{jl}}{\partial x^b} - \frac{\partial h_{jb}}{\partial x^l}) \\
&+ H^{il}(2\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^b \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jb}}{\partial x^l \partial x^k}) \\
&+ g^{il}(2\frac{\partial^2 h_{jl}}{\partial x^b \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{jb}}{\partial x^l \partial x^k})]y^j y^b \\
&= \partial H * \partial g + \partial g * \partial Ric + H * \partial^2 g \\
&+ g * \partial^2 Ric
\end{aligned}$$

another terms are

$$\begin{aligned}
II &= (\partial H * (\partial g)y + \partial g * (\partial Ric)y \\
&+ H * (\partial^2 g)y + g * (\partial^2 Ric)y)y \\
III, IV &= ((H * \partial g + g * \partial Ric))(g * \partial g - \partial g)y^j y^k \\
V &= (g * (\partial g)y(H * (\partial g)y + g * (\partial Ric)y)
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2. *Under the Finsler Ricci flow the evolution of the scalar curvature is given by*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}ic &= 2\mathcal{R}ic^2 + \frac{1}{F^2}g^{sl}(-2\frac{\partial^2 Ric_{rl}}{\partial x^s \partial x^k} + \frac{\partial^2 Ric_{rk}}{\partial x^s \partial x^l} \\
&+ \frac{\partial^2 Ric_{sl}}{\partial x^r \partial x^k} - \frac{\partial^2 Ric_{sk}}{\partial x^r \partial x^l})y^r y^k \\
&+ \textit{Lower order terms.}
\end{aligned}$$

Proof. Using the Finsler Ricci flow and (??), we have

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}ic = 2\mathcal{R}ic^2 + \frac{1}{F^2}(\frac{\partial}{\partial t}R_k^k)$$

by (??) we compute the time derivative of R_k^k as,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_k^k &= \frac{1}{2}g^{sl}(2\frac{\partial^2 h_{rl}}{\partial x^s \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{rk}}{\partial x^s \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{sl}}{\partial x^r \partial x^k} \\
&+ \frac{\partial^2 h_{sk}}{\partial x^r \partial x^l})y^r y^k + \textit{lower order terms.}
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.3. *Suppose* $g(t)$ *is a smooth one-parameter family of Berwald metrics on a manifold* M *such that* $\frac{\partial F^2}{\partial t} = -2F^2\mathcal{R}ic$*, then the evolution* *of curvature tensor evolves by*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}W^i_k &= (\partial H * \partial g + \partial g * \partial Ric + H * \partial^2 g \\ &+ g * \partial^2 Ric) \\ &+ (\partial H * (\partial g)y + \partial g * (\partial Ric)y \\ &+ H * (\partial^2 g)y + g * (\partial^2 Ric)y)y \\ &+ (H * \partial g + g * \partial Ric)(g * \partial g - \partial g)y^j y^k \\ &+ (g * (\partial g)y)(H * (\partial g)y + g * (\partial Ric)y) \\ &- \frac{1}{n-1}(2\mathcal{R}ic^2 + \frac{1}{F^2}g^{sl}(-2\frac{\partial^2 Ric_{rl}}{\partial x^s \partial x^i} \\ &+ \frac{\partial^2 Ric_{ri}}{\partial x^s \partial x^l} + \frac{\partial^2 Ric_{sl}}{\partial x^r \partial x^i} - \frac{\partial^2 Ric_{si}}{\partial x^r \partial x^l})y^r y^i \\ &+ Lower\ order\ terms)\end{aligned}$$

References

[1] D. Bao, "On two curvature-driven problems in Riemann-Finsler geometry," Advanced studies in pure mathematics, vol. 48, pp. 19-71, 2007.

[2] S. Azami, A. Razavi, "Existence and uniqueness for solution of Ricci flow on Finsler manifolds," International journal of geometric methods in modern physics, vol. 10, no. 03, 2013.

[3] M. Xiaohuan, "Weyl curvature of a Finsler space," Appl. math. J. chinese univ. ser. B , vol. 20, no. 1,pp.10-20, 2005.

Books:

[4] C. Hopper, B. Andrews, The Ricci flow in Riemannian geometry, springer, 2010.

[5] Z. Shen, Differential geometry of spray and Finsler spaces, Kluwer academic publishers, 2001.

[6] B. Chow, D. Knopf, The Ricci flow an introduction, American mathematical society, 2004.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

گروه های پیرا توپولوژی R-تجزیه پذیر

جواد جمالزاده *، عضو هیأت علمي گروه رياضی، دانشگاه سيستان و بلوچستان، jamalzadeh۱۹۸۰@gmail.com

محمد ذوالفقاری دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه سيستان و بلوچستان، mohamadzolfagari.۱۴@gmail.com

چکیده: در این مقاله ما R-تجزیه پذیری را بر روی گروه پیرا توپولوژی برسی می کنیم. ما برای هر$i = ۱,۲,۳,۴$خانواده ای از گروه های پیرا توپولوژی R_i-تجزیه پذیر G را با این شرط که هر برای تابع حقیقی مقدار روی G، هومورفیسم پیوسته $P: G \longrightarrow H$ به روی گروه پیرا توپولوژی H را به طوریکه گروه H، دارای خاصیت جداسازی T_i باشد و شرط تجزیه پذیری نیز برای آن برقرار باشد را تعریف می کنیم. ما نشان می دهیم که خط Sorgenfrey گروه پیرا توپولوژی لیندلوفی است که $R_۱$-تجزیه پذیر نیست. با این حال هر گروه پیرا توپولوژی منظم(هاسدورف) لیندلوف موضعا ω-محدود، $R_۳$-تجزیه پذیر($R_۲$-تجزیه پذیر) است. همچنین نشان می دهیم که گروه پیرا توپولوژی لیندلوف منظم موضعا ω-محدود با زیر گروهی از حاصل ضرب گروه های پیرا توپولوژی مجزای متر پذیر به طور توپولوژیکی ایزومورفیسم هست.

کلمات کلیدی: گروه های R-تجزیه پذیر، لیندلوف، کلاً ω-محدود، ω-سلول، Z-نشانده

۱ پیش‌گفتار

برای گروه پیرا توپولوژی H با توپولوژی τ، توپولوژی توام را با $\tau^{-۱}$ روی H را به صورت $\tau^{-۱} = \{U^{-۱} : U \in \tau\}$ تعریف می کنیم. لذا $H' = (H, \tau^{-۱})$ همواره یک گروه پیرا توپولوژی می باشد و عملگر معکوس $x \longrightarrow x^{-۱}$ هومومورفیسمی از H به H' است. کران بالایی $\tau^* = \tau \vee \tau^{-۱}$ گروهی توپولوژی روی H است و $H^* = (H, \tau^*)$ را گروه توپولوژِی وابسته به H می نامیم. واضح است که گروه H^* برای هر گروه پیرا توپولوژی H که $T_۱$ باشد،هاسدورف خواهد بود.

تعریف ۱.۱. *فرض کنیم P خاصیتی توپولوژیکی باشد. گروه پیرا توپولوژی H را کاملا P گوییم هر گاه گروه توپولوژی وابسته H^* ، دارای خاصیت P باشد.*

تعریف ۲.۱. *گروه نیم توپولوژی چپ G را ω- محدود گوییم اگر برای هر همسایگی باز V از عنصر همانی e در G، زیر مجموعه شمارای A از G چنان موجود باشدکه $G = A.V$.*

بنابراین می توان کلاً لیندلوفی و کلاً ω-محدودی و کلاً فشرده شمارایی را برای گروه های پیرا توپولوژی مورد مطالعه قرار دهیم. موضوع مهمی که ما روی آن بحث خواهیم کرد خانواده کلاً لیندلوف و کلاً ω-محدود از گروه های

پیرا توپولوژی است.
چون توپولوژی τ^* از گروه توپولوژی وابسته H^* finer است لذا توپولوژی مادر آن یعنی τ را در نظر می گیریم، طبق تعریف(۱.۱) واضح است که گروه پیرا توپولوژی کلاً لیندلوف، لیندلوف است. به نظر می رسد که عکس این موضوع اشتباه است چون که خط Sorgenfrey گروه پیرا توپولوژی است که لیندلوف است اما گروه توپولوژی وابسته S^* آن گسسته است بنابراین لیندلوف نیست.
حال نتیجه ای مربوط به خاصیت های گروه های پیراتوپولوژی H که مربوط به گروه توپولوزی وابسته H^* است را بیان می کنیم.

لم ۳.۱. *فرض کنیم H یک گروه پیرا توپولوژی باشد. بنابراین قطر $\Delta = \{(x,x) : x \in H\}$ یک زیر گروه بسته از گروه پیرا توپولوژی $H \times H'$ است و Δ مطرح شده با توپولوژی القا شده از $H \times H'$ گروه توپولوژی هاسدورفی است که ایزومورفیسم توپولوژیکی با گروه وابسته H^* است.*

تعریف ۴.۱. *فضای توپولوژی X را Σ- فضای لیندلوف گویند هر گاه Σ- فضا و لیندلوف باشد.*

نتیجه ۵.۱. *فرض کنیم H گروه پیرا توپولوژی هاسدورف باشد. بنابراین:*
۱. اگر H ، σ- فشرده باشد، بنابراین H^* نیز چنین است.
۲. اگر H ، Σ- فضای لیندلوف باشد، بنابراین H^* نیز چنین است.
۳. اگر H شبکه شمارا داشته باشد، بنابرای H^* نیز دارای شبکه شماراست.

گزاره ۶.۱. *هر زیر گروه H از حاصل ضرب توپولوژیکی $G = \prod_{i\in I} G_i$ از گروه های پیرا توپولوژی شمارای نوع دوم به طوریکه در شرط T_1 صدق کند، کاملاًω- محدود است.*

قضیه ۷.۱. *هر گروه پیرا توپولوژی لیندلوف و منظم(هاسدورف) کاملاًω- محدود به طور توپولوژیکی ایزومورفیسم با زیر گروهی از حاصل ضرب گروه های پیرا توپولوژی منظم(هاسدورف) شمارای نوع دوم اند.*

تعریف ۸.۱. *ما فضای X را به طور کامل k- نرمال گوییم هرگاه بستار هر مجموعه باز از یک تابع حقیقی مقدار پیوسته بر X یک صفر- مجموعه باشد.*

گزاره ۹.۱. *فرض کنیم H یک گروه پیرا توپولوژی منظم و یک Σ- فضای لیندلوف باشد. بنابراین فضای H به طور کامل k- نرمال است.*

تعریف ۱۰.۱. *فضای X را ω- سلول یا به طور نمادین $ceL_\omega(X) \leq \omega$ گوییم، اگر هر خانواده γ از G_δ- مجموعه ها در X شامل زیر خانواده شمارای λ باشد به طوریکه $\bigcup \lambda$ چگال در $\bigcup \gamma$ باشد.*

گزاره ۱۱.۱. *فرض کنیم H گروه پیرا توپولوژی هاسدورف باشد و فرض کنیم که گروه توپولوزی وابسته آن H^* ، Σ- فضای لیندلوف باشد بنابراین:*
۱. فضای H کلاً لیندلوف است.
۲. فضای H ، ω- سلول است.
۳. اگر γ خانواده شمارا از G_δ- مجموعه های بسته در H باشد، بنابراین زیر گروه بسته N از H به گونه ای موجود است که گروه پیرا توپولوژی خارج قسمتی $\frac{H}{N}$ هاسدورف است و دارای شبکه شمارا بوده و برای هر $F \in \gamma$ ، $F = \Pi^{-1}\Pi(F)$ که $\Pi : H \longrightarrow \frac{H}{N}$ همومورفیسم خارج قسمتی است.

۲ R-تجزیه پذیری در گروه های پیرا توپولوژی

گروه های توپولوژی R-تجزیه پذیر خانواده بزرگی از گروه ها را با خواص جالب و ویژه تشکیل می دهند. برای گروه های پیرا توپولوژی تعرفی شبیه R-تجزیه پذیری در گروه های توپولوژی را ارائه می دهیم. از این رو ما اصول جداسازی را بر روی گروه های پیرا توپولوژی مشخص می کنیم. چون برخلاف گروه های توپولوژی وقتی که $0 \leq i \leq j \leq 4$ نمی توانیم داشته باشیم $T_i \Rightarrow T_j$.

تعریف ۱.۲. *گروه پیرا توپولوژی H را برای $i = 1, 2, 3, 4, 5$، R_i-تجزیه پذیر گوییم، اگر H یک فضای T_i باشد و برای هر تابع حقیقی مقدار f روی H بتوانیم همومورفیسم پیوسته $p : H \longrightarrow K$ به روی گروه پیرا توپولوژی K با وزن شمارا که در شرط جداسازی T_i صدق کند و تابع حقیقی-مقدار g را روی K به گونه ای پیدا کنیم که $f = gop$*

واضح هست که هر گروه پیرا توپولوژی R_j-تجزیه پذیر وقتی که $1 \leq i < j \leq 3/5$، R_i-تجزیه پذیر است.
چون هر فضای منظم شمارای نوع دوم نرمال است (از این رو تیخونوف است)، این همواره واضح است که هر گروه پیرا توپولوژی تیخونوف R_3-تجزیه پذیر، $R_{3\frac{1}{2}}$-تجزیه پذیر است. این دلیل مابرای این که با R_3-تجزیه پذیری در مورد گروه های پیرا توپولوژی(زیرگروه های آنها) سرو کار داریم هست.
در زیر از این موضوع که عملگر معکوس $x \longrightarrow x^{-1}$ در گروه های پیرا توپولوژی همومورفیسمی از H به H' است استفاده می کنیم.

گزاره ۲.۲. *اگر H گروه پیرا توپولوژی R_i-تجزیه پذیر باشد که $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$، بنابراین H' هم چنین است.*

با توجه به قضیه ای در [۱] هر گروه توپولوژی لیندلوف R-تجزیه پذیراست. خط Sorgenfrey گروه پیرا توپولوژی است که R_1-تجزیه پذیر نیست. بعلاوه می دانیم که هر گروه توپولوژی پیش فشرده R-تجزیه پذیر است. مثال بعدی نشان می دهد که درگروه های پیرا توپولوژی حتی ترکیبی از خاصیت لیندلوف و پیش فشردگی R_1-تجزیه پذیری را نتیجه نمی دهد، به طور معمول پیش فشردگی برای گروه های توپولوژی(پیرا توپولوژی) بدین معناست که می توان به کمک تعدادی از انتقال های متناهی از هر همسایگی عنصر همانی، آن را پوشاند.

مثال ۳.۲. *فرض کنیم S یک خط Sorgenfrey باشد و Z گروهی از اعداد صحیح باشد که زیر گروه بسته ای از S است، بنابراین گروه پیرا توپولوژی خارج قسمتی $T = \frac{S}{Z}$ به طور جبری گروه جمعی دوری است که دارای پایه ای موضعی در عنصر همانی $\bar{0}$ تولید شده به وسیله بازه های نیم باز $[0, \frac{1}{n})$ است که $n \in N$. گروه پیرا توپولوژی T منظم، به طور ارثی لیندلوف، به طور ارثی مجزا شده و پیش فشرده است. ادعا می کنیم که T نمی تواند R_1-تجزیه پذیر باشد.*

خط Sorgenfrey و گروه پیرا توپولوزی خارج قسمتی $\frac{S}{Z}$ در مثال(۳.۲) یک فضای شمارای نوع اول نرمال متر ناپذیر است. لذا از این موضوع که هیچ یک از S و $T = \frac{S}{Z}$، R_1-تجزیه پذیر نیست می توان نتیجه زیر را بیان کرد.
$\chi(H)$ را کوچکترین کاردینال از پایه موضعی از عنصر همانی گروه پیرا توپولوژی H قرار می دهیم (که مشخصه H نامیده می شود) و $W(H)$ را وزن H قرار می دهیم که کوچکترین کاردینال پایه H است

گزاره ۴.۲. *هر گروه پیرا توپولوژی به طور کامل منظم R_1-تجزیه پذیر به گونه ای است که $W(H) = \chi(H)$.*

گزاره ۵.۲. *هر گروه پیرا توپولوژی R_1-تجزیه پذیر به طورکامل ω-محدود است.*

قضیه ۶.۲. *هر گروه پیرا توپولوژی منظم لیندلوف و کاملا ω-محدود H، R_3-تجزیه پذیر است.*

قضیه ۷.۲. *فرض کنیم H گروه پیراتوپولوژی هاسدورف کاملاً ω- محدود باشد. اگر H لیندلوف باشد بنابرای $R_۲$- تجزیه پذیر است.*

قضیه ۸.۲. *H را گروه پیراتوپولوژی هاسدورف در نظر می گیریم و فرض می کنیم که H لیندلوف باشد. بنابراین H، $R^۲$- تجزیه پذیر است اگر و تنها اگر کاملاً ω- محدود باشد.*

هر فضا با شبکه شمارا لیندلوف است، بنابراین قسمت (۳) از نتیجه (۵.۱) ثابت می کند که گروه پیرا توپولوژی با شبکه شمارا، کلاً لیندلوف است. این موضوع و قضیه(۶.۲) نتیجه زیر را به همراه دارند.

نتیجه ۹.۲. *هر گروه پیرا توپولوژی منظم با شبکه شمارا $R_۳$- تجزیه پذیر است.*

حالت خاص نتیجه فوق و با توجه به قضیه (۷.۲) برای گروه های پیرا توپولوژی هاسدورف اتفاق می افتد.

نتیجه ۱۰.۲. *هر گروه پیرا توپولوزی هاسدورف با شبکه شمارا $R_۲$- تجزیه پذیر است.*

قضیه ۱۱.۲. *زیر گروه z- نشاننده از یک گروه پیرا توپولوژی R_i- تجزیه پذیر به ازای $i = ۱, ۲, ۳$، R_i- تجزیه پذیر خواهد بود*

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنیم H یک گروه پیرا توپولوژی باشد به طوریکه یک Σ- فضای لیندلوف باشد. بنابراین هر زیر گروه از H، $R_۳$- تجزیه پذیر خواهد بود.*

نتیجه ۱۳.۲. *هر زیرگروه از گروه پیرا توپولوژی منظم σ- فشرده، $R_۳$- تجزیه پذیراست*

لم ۱۴.۲. *فرض کنیم D زیر فضای چگال از فضای X باشد و فرض کنیم $f : D \longrightarrow Y$ و $\varphi : X \longrightarrow Z$ نگاشت های پیوسته ای باشد که φ باز و Y منظم باشدو فرض کنیم که β پایه ای برای Y باشد به طوریکه برای هر $V \in \beta$، $cL_X f^{-۱}(V) = \varphi^{-۱}\varphi(cL_X f^{-۱}(V))$. بنابراین نگاشت پیوسته $g : \varphi(D) \longrightarrow Y$ چنان موجود است که $f = go\varphi\mid_D$.*

گزاره ۱۵.۲. *هر زیر گروه از گروه پیرا توپولوژی هاسدورف σ- فشرده H، $R_۲$- تجزیه پذیراست.*

مراجع

[1] A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures, Atlantis Stud. Math., vol. 1, Atlantis Press, World Scientific, Paris, Amsterdam, 2008.

[2] A.V. Arhangel'skii, E.A. Reznichenko, Paratopological and semitopological groups versus topological groups, Topology Appl. 151 (2005) 107–119.

[3] C.Hernandez and M.Tkachenko, subgroups of R-factorizable groups, comment.Math.Univ.Carolinae 39,2(1998)371-378.

[4] I.Juhasz, cardinal functions in Topology-ten years later, Mathematisch centrum, 1980.

[5] R.Engelking.General Topology, PWN, warsaw. 1977.

[6] Manuel Sanchis, Mikhail Tkachenko, R-factorizable paratopological groups, Topology and its Applications(2009).

[7] Manuel Sanchis a, Mikhail Tkachenko, Totally Lindelöf and totally ω-narrow paratopological groups, Topology and its Applications 155 (2008) 322–334.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

General Uniform Product Topology

S. Baharlouie*, M.Sc. , s.baharlou88@gmail.com

B. Bazigaran , Member of Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, bazigaran@kashanu.ac.ir

Abstract: Some kind of general product topology will be introduced in this article, and some of its elementary properties will be proved.

Keywords: bronology , general uniform product topology, complete $\vee$-homomorphism, complete lattice.

1 INTRODUCTION

Since each uniformity space is a topological space, new topologies can be defined by obtaining new uniformities. This way for defining topology was appeared in an article by McCoy([7]) in 2010.

This definition is introduced in the first section of this article. For the new definition, some preliminary concepts are needed. Some of them are mentioned in the first section (for more information refer to [3] and [5]).

2 GENERAL UNIFORM PRODUCT TOPOLOGY

A bronology on a nonempty set S is a family $\mathscr{B}$ of subsets of S satisfying the following axioms:

1) $\forall A, B \in \mathscr{B}: \qquad A \cup B \in \mathscr{B};$

2) $\forall A \in \mathscr{B} \qquad \forall B \subseteq A: \qquad B \in \mathscr{B};$

3) $\cup\mathscr{B} = S.$

The set of all bronologies on the set S is denoted by $\mathscr{B}_S$.

*Corresponding Author

Proposition 2.1. The intersection of a family of bronologies is a bronology [3].

A base of a bronology $\mathscr{B}$ on a set S is any subset $\mathscr{A}$ of $\mathscr{B}$ such that $\cup\mathscr{A} = S$ and for every elements A_1, A_2 of $\mathscr{A}$, there is some $A_3 \in \mathscr{A}$ such that $A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$.

Proposition 2.2. Let $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(S)$ such that $\mathscr{A}$ is a cover of S and for A_1, A_2 of $\mathscr{A}$, there exists $A_3 \in \mathscr{A}$ such that $A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$, then the set

$$\downarrow \mathscr{A} = \{B \subseteq S | \ \exists A \in \mathscr{A} : \ B \subseteq A\}$$

is a bronology on the set S and $\mathscr{A}$ is called its base.

The set $\downarrow \mathscr{A}$ cited in the proposition 2.2 is called bronology generated by $\mathscr{A}$.

We adhere to the convection if $X_s = X$ for each $s \in S$, product space $\prod_{s\in S} X_s$ is shown by X^S. Now, to define the uniformity on the product space X^S, consider

$$P_s : X^S \times X^S \longrightarrow X_s \times X_s$$

for each $s \in S$ is the bijection map defined by

$$P_s(x, y) =< p_s(x), p_s(y) >=< x_s, y_s >$$

for all $< x, y >\in X^S \times X^S$. For constructing a new topology on X^S, we need our space X to be

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

a uniform space, say with diagonal uniformity $\mathscr{D}$. Then, for $x \in X$ and $D \in \mathscr{D}$, we define

$$D[x] = \{y \in X \mid \ <x, y> \in D\}.$$

Theorem 2.3. Let $\mathscr{D}$ be a uniformity on a set X, and $\mathscr{E}$ be a base for it. For each $x \in X$, the collection

$$\mathscr{U}_x = \{D[x] \mid D \in \mathscr{D}\}$$

is a neighborhood base at x; therefore, $\bigcup_{x\in X} \mathscr{U}_x$ is a base of a topology on X. In addition, $\mathscr{E}$ produces the same topology[4].

Lemma 2.4. If $\mathscr{A}$ is a base of a bronology on the set S, then the subsets of $X^S \times X^S$ of the form

$$\bigcap_{s\in I} P_s^{-1}(D)$$

where $I \in \mathscr{A}$ and D is a basic member of $\mathscr{D}$ (same for all $s \in I$), is a base for a uniformity on X^S. Furthermore, the bronology on S generated by $\mathscr{A}$ gives the same uniformity on X^S that $\mathscr{A}$ does.

A similar proof of the previous lemma can be found in [7].

The uniformity on X^S generated by the base in lemma 2.4 is denoted by $\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$. Let $\gamma_{\mathscr{A}}$ denote general uniform product topology on X^S which is generated by the uniformity $\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$. It is resulted immediately

Proposition 2.5. If $\mathscr{A}$ and $\mathscr{A}'$ are two bases of a bronology on a nonempty set S, then $\mathscr{D}_{\mathscr{A}} = \mathscr{D}_{\mathscr{A}'}$[1].

3 GENERAL UNIFORM PRODUCT TOPOLOGY AND COMPLETE LATTICE

In this section, we adhere to the convection if $(X, \leq)$ is a partially ordered set and $A \subseteq X$, then the suprimum of A is shown by $\vee A$, the infimum of it is shown by $\wedge A$, and the maximum of X is shown by 1.

Theorem 3.1. If $(X, \leq)$ is a partially ordered set such that $1 \in X$, and $\wedge A$ exists for each $\emptyset \neq A \subseteq X$, then X is complete lattice [3].

Proposition 3.2. The suprimum of any family of bronologies on S, $\{\mathscr{B}_i\}_{i\in I}$, exists in $\mathscr{B}_S$ and is equal to

$$<\bigcup_{i\in I} \mathscr{B}_i> = \{B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \leq j \leq n \quad i_j \in I,\ B_{i_j} \in \mathscr{B}_{i_j}\}\ [3].$$

By using propositions 2.1, 3.2, and theorem 3.1, the below theorem can be proved.

Theorem 3.3. Let S be a nonempty set, then the partially ordered set $(\mathscr{B}_S, \subseteq)$ is a complete lattice.

Proposition 3.4. The collection of all uniformities on a set X is a complete lattice [9].

For the rest, the family of all the topologies on a topological space Y is denoted by $Top(Y)$.

We mention if X and X' are complete lattices and $f : X \to X'$, then the function f is complete $\vee$-homomorphism whenever

$$f(\bigvee_I a_i) = \bigvee_I f(a_i)$$

for each $a_i \in X$. Now, we will prove the main theorems of this section.

Theorem 3.5. If $U(X^S)$ is the collection of all the uniformities on X^S with $S \neq \emptyset$, and $\mathscr{B}_S$ is the family of all the bronologies on S, then the map

$$\psi : \mathscr{B}_S \to U(X^S)$$

with $\psi(\mathscr{B}) = \mathscr{D}_{\mathscr{B}}$ is complete $\vee$-homomorphism.

Proof. We need to show

$$\psi(\bigvee_I \mathscr{B}_i) = \mathscr{D}_{\bigvee_I \mathscr{B}_i} = \bigvee_I \mathscr{D}_{\mathscr{B}_i} = \bigvee_I \psi(\mathscr{B}_i).$$

Let $E \in \mathscr{D}_{\bigvee_I \mathscr{B}_i}$; so, there are some $B \in \bigvee_I \mathscr{B}_i$ and $D \in \mathscr{D}$ such that

$$\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D) \subseteq E.$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

By proposition 3.2,

$$B = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_n},$$

where $B_{i_j} \in \mathscr{B}_{i_j}$ for each $1 \leq j \leq n$. Now,

$$(\bigcap_{s\in B_{i_1}} P_s^{-1}(D)) \cap (\bigcap_{s\in B_{i_2}} P_s^{-1}(D)) \cap \cdots \cap$$

$$(\bigcap_{s\in B_{i_n}} P_s^{-1}(D)) = \bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D) \subseteq E.$$

Hence, $E \in \bigvee_I \mathscr{D}_{\mathscr{B}_i}$.

Conversely, let $F \in \bigvee_I \mathscr{D}_{\mathscr{B}_i}$. According to the suprimum of a collection of uniformities, there is some $V_{s_1} \cap V_{s_2} \cap \cdots \cap V_{s_n}$ such that $V_{s_j} \in \mathscr{D}_{\mathscr{B}_{s_j}}$ for each $1 \leq j \leq n$ and $V_{s_1} \cap V_{s_2} \cap \cdots \cap V_{s_n} \subseteq F$. Since $V_{s_j} \in \mathscr{D}_{\mathscr{B}_{s_j}}$ for each $1 \leq j \leq n$, there are some $D_{s_j} \in \mathscr{D}$ and $B_{s_j} \in \mathscr{B}_{s_j}$ such that $\bigcap_{s\in B_{s_j}} P_s^{-1}(D_{s_j}) \subseteq V_{s_j}$. Now, by

$$D = \bigcap_{j=1}^{n} D_{s_j} \in \mathscr{D}$$

and

$$B = B_{s_1} \cup B_{s_2} \cup \cdots \cup B_{s_n} \in \bigvee_I \mathscr{B}_i,$$

we have
$\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D) = (\bigcap_{s\in B_{s_1}} P_s^{-1}(D)) \cap (\bigcap_{s\in B_{s_2}} P_s^{-1}(D)) \cap \cdots \cap (\bigcap_{s\in B_{s_n}} P_s^{-1}(D)) \subseteq (\bigcap_{s\in B_{s_1}} P_s^{-1}(D_{s_1})) \cap (\bigcap_{s\in B_{s_2}} P_s^{-1}(D_{s_2})) \cap \cdots \cap (\bigcap_{s\in B_{s_n}} P_s^{-1}(D_{s_n})) \subseteq V_{s_1} \cap V_{s_2} \cap \cdots \cap V_{s_n} \subseteq F.$
Hence, $F \in \mathscr{D}_{\bigvee_I \mathscr{B}_i}$ and this proves what we wanted. ∎

Theorem 3.6. If $\mathscr{B}_S$ is the family of all bronologies on a nonempty set S, and $\mathscr{D}$ is a uniformity on X_s for each $s \in S$, then $\psi : \mathscr{B}_S \to Top(X^S)$ where $\psi(\mathscr{B}) = \gamma_{\mathscr{B}}$ is a complete $\vee$-homomorphism, that is,

$$\psi(\bigvee_I \mathscr{B}_i) = \gamma_{\bigvee_I \mathscr{B}_i} = \bigvee_I \gamma_{\mathscr{B}_i} = \bigvee_I \psi(\mathscr{B}_i).$$

Proof. Let $W \in \bigvee_I \gamma_{\mathscr{B}_i}$. We need to show $W \in \gamma_{\bigvee_I \mathscr{B}_i}$, that is, for each $x \in W$, there are some $B \in \bigvee_I \mathscr{B}_i$ and $D \in \mathscr{D}$ such that $x \in (\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D))[x] \subseteq W$. Since $W \in \bigvee_I \gamma_{\mathscr{B}_i}$,

$$W = W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \cdots \cap W_{i_n}$$

such that W_{i_j} is a basic open member of $\gamma_{\mathscr{B}_{i_j}}$ for each $1 \leq j \leq n$. For $x \in W$, we have $x \in W_{i_j}$ for each $1 \leq j \leq n$, so that there are some $D_{i_j} \in \mathscr{D}$ and $B_{i_j} \in \mathscr{B}_{i_j}$ such that

$$x \in (\bigcap_{s\in B_{i_j}} P_s^{-1}(D_{i_j}))[x] \subseteq W_{i_j}.$$

Since $D_{i_j} \in \mathscr{D}$ for each $1 \leq j \leq n$,

$$D = D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \cdots \cap D_{i_n} \in \mathscr{D}$$

and

$$B = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_n} \in \bigvee_I \mathscr{B}_i.$$

To show $(\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D))[x] \subseteq W$, let us consider $y \in (\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D))[x]$, then

$$< x, y >\in \bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D)$$

results

$$\begin{aligned} &\forall s \in B \quad < x_s, y_s >\in D = D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \cdots \cap D_{i_n} \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq j \leq n \quad < x, y >\in \bigcap_{B_{i_j}} P_s^{-1}(D_{i_j}) \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq j \leq n \quad y \in (\bigcap_{B_{i_j}} P_s^{-1}(D_{i_j}))[x] \subseteq W_{i_j} \\ &\Rightarrow y \in W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \cdots \cap W_{i_n} = W. \end{aligned}$$

Hence, $\bigvee_I \gamma_{\mathscr{B}_i} \subseteq \gamma_{\bigvee_I \mathscr{B}_i}$.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Conversely, let $W' \in \gamma_{\bigvee_I \mathscr{B}_i}$. We need to show $W' \in \bigvee_I \gamma_{\mathscr{B}_i}$. For $x \in W'$,

$\exists D \in \mathscr{D}$, $B \in \bigvee_I \mathscr{B}_i$: $x \in (\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D))[x] \subseteq W'$.

Since $B \in \bigvee_I \mathscr{B}_i$, $B = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_n}$ such that $B_{i_j} \in \mathscr{B}_{i_j}$ for each $1 \leq j \leq n$. By observing that $((\bigcap_{s\in B_{i_1}} P_s^{-1}(D))[x]) \cap ((\bigcap_{s\in B_{i_2}} P_s^{-1}(D))[x]) \cap \cdots \cap ((\bigcap_{s\in B_{i_n}} P_s^{-1}(D))[x]) = ((\bigcap_{s\in B_{i_1}} P_s^{-1}(D)) \cap (\bigcap_{s\in B_{i_2}} P_s^{-1}(D)) \cap \cdots \cap (\bigcap_{s\in B_{i_n}} P_s^{-1}(D)))[x] = (\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D))[x]$,
and considering

$$V_{i_j} = (\bigcap_{s\in B_{i_j}} P_s^{-1}(D))[x]$$

for each $1 \leq j \leq n$, we have

$$\begin{aligned} x \in V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_n} &= ((\bigcap_{s\in B_{i_1}} P_s^{-1}(D))[x]) \\ &\cap ((\bigcap_{s\in B_{i_2}} P_s^{-1}(D))[x]) \cap \cdots \cap ((\bigcap_{s\in B_{i_n}} P_s^{-1}(D))[x]) \\ &= (\bigcap_{s\in B} P_s^{-1}(D))[x] \subseteq W'. \end{aligned}$$

Hence, $\gamma_{\bigvee_I \mathscr{B}_i} \subseteq \bigvee_I \gamma_{\mathscr{B}_i}$. ■

References

[1] B. Bazigaran, S. Baharlouie, "General Box Product," technical report of a work done under the financial support of the research council of the university of Kashan, Kashan, 2013.

[2] N. Bourbaki, Elements of Mathematics, "General Topology," Part 1, Addison-Wesley Publishing Company, Paris,1966.

[3] A. Eghbali," Bornologies and Total bounded," M.Sc. dissetation, Dept. Math., Univ. Kashan, June 2011.

[4] R. Engelking, "General Topology," Sigma Ser. Pure Math., vol.**6** , Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] H. Hogbe-Nlend, "Bornologies and Functional Analysis," North-Holland, Amsterdam, 1977.

[6] G.A. Gratzer, "Lattice Theory: Foundation," Springer, 2011.

[7] R.A. McCoy, "Function spaces and product topologies on powers of spaces," Topology and its Applications, **157** (2010), 25162537.

[8] A. D. Razafindrakoto, "Uniform Spaces," Univ. Cape Town, South Africa, 2008.

[9] S. Willard, "General Topology, " AddisonWesley, Reading, MA, 1968.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

DOUBLE STRUCTURES ON GENERALIZED LIE GROUPS

M. R. Farhangdoost,* Academic member, Department of Mathematics, College of Sciences, Shiraz University, Iran.
Farhang@Shirazu.ac.ir
F. Golrizkhatami, M. Sc. student, Department of Mathematics, College of Sciences, Shiraz University, Iran.
faranakgolrizkhatami@yahoo.com

Abstract: In this paper by framework of Mackenzie doubles, we introduce double objects (i.e. double Lie groupoids, double Lie algebroids, $\mathcal{LA}$-groupoids) on generalized Lie groups. Then we show that these structures on generalized Lie groups are related, i.e. Mackenzie doubles diagram on generalized Lie groups is commutative.

Keywords: Double Lie groupoids, Double Lie algebroid, $\mathcal{LA}$-groupoids, Generalized Lie group.

1 INTRODUCTION

In recent years, the objective is to peruse the relationship between double complexes such as the de Rham double complex and double structures such as those introduced by Mackenzie. double Lie groupoids, double Lie algebroids and $\mathcal{LA}$-groupoid are three types of objects as Mackenzie doubles. Mackenzie attend Lie functor and its application to these structures, [3]. R. A. Mehta ([4]), investigated two new double structures that are related to the Mackenzie doubles, namely Q-groupoids and Q-algebroids such that a Q-groupoid (Q-algebroid) is a supergroupoid (superalgebroid) together a homological vector field satisfying certain compatibility conditions. Functors between the categories of Mackenzie doubles, Q-groupoids and Q-algebroids is denoted by $[-1]$, from the category of Lie algebroids to the category of Q-manifolds. Lie algebroid $E \to M$ to be Q-manifold ($[-1]E$,d_E), where $[-1]E$ is the supermanifold with structure sheaf $\Gamma(\wedge E^*)$ and d_E is the differential associated to the algebroid structure of E.

Another important structure in geometry is top space. The sense of top spaces or generalized Lie groups was introduced by M. R. Molaei in 1998. Several authors (Araujo, Mehrabi, Oloomi, Tahmoresi, Ebrahimi, etc.) studied concepts of generalized groups and top spaces,[1, 2, 5].

In this paper we introduce generalized Lie group-double structures on top space or generalized Lie group.

*Corresponding Author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

2 Generalized Lie group-double groupoid, generalized Lie group-algebroid and generalized Lie group$\mathcal{LA}$-groupoid

A groupoid consist of two sets G and B toghether two maps $\alpha, \beta : G \to B$ called respectively the source and target projection, a partial multiplication $\mu : G * G \to G$ defined on set $G * G = \{(h, g) \in G \times G | \alpha(h) = \beta(g)\}$, a map $e : B \to G$ called the object inclusion map, and an inverse map $i : G \to G$ by $g \mapsto g^{-1}$, these maps satisfy the following conditions:

1. $\alpha(\mu(g, h)) = \alpha(h)$ and $\beta(\mu(g, h)) = \beta(g)$, for all $(h, g) \in G * G$;
2. $g(hf) = (gh)f$ for all $g, h, f \in G$ such that $\alpha(g) = \beta(h)$ and $\alpha(h) = \beta(f)$;
3. $\alpha(e(x)) = \beta(e(x)) = x$, for all $x \in B$;
4. $ge(\alpha(g)) = g$ and $e(\beta(g))g = g$, for all $g \in G$;
5. Each $g \in G$ has inverse g^{-1} such $\alpha(g^{-1}) = \beta(g)$, $\alpha(g) = \beta(g^{-1})$, $\mu(g^{-1}, g) = e(\alpha(g))$ and $\mu(g, g^{-1}) = e(\beta(g))$.

Usually an element of B is called an object of the groupoid G and element of G is called an arrow.

Groupoid G on base B together with smooth structures on G and B such that α and β are surjective submersions and partial multiplication $G * G \to G$, inclusion where and inverse maps are smooth is said a Lie groupoid.

Definition 2.1. *Let $\alpha_H, \beta_H : D \to H$ and $\alpha_V, \beta_V : D \to V$ respectively as source and target maps and we use α, β denote source and target maps from H or V to T, the square*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & D \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
M & H \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

is double Lie groupoid if the following conditions hold:

1. *The horizontal and vertical source and target maps commute;*
$$\alpha o \alpha_H = \alpha o \alpha_V \qquad \beta o \alpha_H = \alpha o \beta_V$$
$$\beta o \beta_H = \beta o \beta_V \qquad \alpha o \beta_H = \beta o \alpha_V$$
2. $$\alpha_V(s_1 ._H s_2) = (\alpha_V s_1).(\alpha_H s_2),$$
$$\alpha_H(s_1 ._V s_3) = (\alpha_H s_1).(\alpha_H s_3)$$
and similarity hold for β_H, β_V;
3. *$\alpha_V(s_{i1}) = \beta_V(s_{i2})$ and $\alpha_H(s_{1i}) = \beta_H(s_{2i})$, for all $i = 1, 2, ...$;*
4. *The double source map*
$$(\alpha_V, \alpha_H) : D \to V_{s \times s} H$$
is submersion.

A generalized Lie group or GLG is a non-empty Hausdorff smooth d-dimensional manifold T admitting an operation called multiplication which satisfies the following conditions:

1. *$(r.s).t = r.(s.t)$, for all $r, s, t \in T$;*
2. *for each $t \in T$, there is a unique $e(t) \in T$ such that $t.e(t) = e(t).t = t$;*
3. *for each $t \in T$ there exists $s \in T$ such that $t.s = s.t = e(t)$;*
4. *The following maps are smooth:*
$$m : T \times T \to T \text{ by}$$
$$(t_1, t_2) \mapsto t_1.t_2;$$
$$i : T \to T \text{ by}$$
$$t \mapsto t^{-1}.$$

Definition 2.2. *A generalized Lie group- groupoid or GLG-Gd is Lie groupoid endowed with a GLG such that the multiplication $m : T \times T \to T$, the unit map and inverse map, which are the structure maps of GLG, are Lie groupoid morphism. Moreover $m((boa), (doc)) = (m(b, d)om(a, c))$.*

Definition 2.3. *A generalized Lie group-double groupoid or GLG-DGd is a double Lie groupoid with structure of GLG such that two actions $m_H : T_{sH\times tH}T \to T$ and $m_V : T_{sV\times tV}T \to T$ which are the structure actions of GLG are double Lie groupoid morphisms. Also, satisfies in the following:*

$$m_H((boa),(doc)) = (m_H(b,d)om_H(a,c));$$

$$m_V((boa),(doc)) = (m_V(b,d)om_V(a,c)).$$

Let $\mathcal{M}$ be a supermanifold and $\mathcal{E}$ is a supervector bundle over $\mathcal{M}$. A superalgebroid is a bundle map $\sigma : \mathcal{E} \to T\mathcal{M}$ (the anchor), and Lie bracket $[.,.] : \Gamma\mathcal{E}\times\Gamma\mathcal{E} \to \Gamma\mathcal{E}$ such that

1. *$(\Gamma\mathcal{E}, [.,.])$ has structure of a Lie superalgebra;*
2. *$[X, fY] = \mathcal{L}_{\sigma(X)}fY + (-1)^{|X||f|}f[X,Y]$.*

A generalized Lie group-superalgebroid or GLG-SAd is superalgebroid together with GLG structure that $m_\mathcal{T} : \Gamma\mathcal{T}\times\Gamma\mathcal{T} \to \Gamma\mathcal{T}$ which is structure map of GLG, is superalgebroid morphism. Also $m_\mathcal{T}((boa);(doc)) = (m_\mathcal{T}(b;d)om_\mathcal{T}(a;c))$.

Theorem 2.4. *Differential map*

$$d_\mathcal{E} : S[1]\Gamma(\mathcal{E}^*) \to S^{+1}[1]\Gamma(\mathcal{E}^*)$$

satisfies the following conditions:

1. *$d_\mathcal{E}$ is a degree 1 derivation of $S[1]\Gamma(\mathcal{E}^*)$;*
2. *$d_\mathcal{E}^2 = 0$.*

Proof. Let $\{x_\alpha\}$ be local coordinates on $\mathcal{T}$, and $\{e_i\}$ a frame of sections of $\mathcal{E}$. If $\{\xi_i\}$ are the fibre coordinates dual to $\{x_\alpha\}$, Then

$$d_\mathcal{E} = \xi^i\sigma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - (-1)^{\sigma_i(\sigma_j-1)}\frac{1}{2}\xi^i\xi^j c_{ij}^k\frac{\partial}{\partial\xi_k}$$

where $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ and the anchor of e_i is $\xi^i\sigma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$. Since $d_\mathcal{E}$ is derivation, it is enough to show that the statement holds on $C^\infty(\mathcal{T})$ and $\Gamma(\mathcal{E}^*)$,

$$i_Y i_X d_\mathcal{E}^2 f \tag{1}$$

$$= (-1)^{(|X||Y|-1)}[\sigma(X)i_Y d_\mathcal{E} f \tag{2}$$
$$-(-1)^{|X||Y|}\sigma(Y)i_X d_\mathcal{A} f - i_{[X,Y]}d_\mathcal{E} f]$$

$$= (-1)^{|X|(|Y|-1)}[\sigma(X),\sigma(Y)]f - \sigma([X,Y]f) = 0$$

which vanishes by anchor identity. Condition (2) proves by calculation for $w \in \Gamma(\mathcal{E}^*)$. □

Lemma 2.5. *Suppose $\mathcal{E} \to \mathcal{T}$ is a supervector bundle and $d_\mathcal{E} : S[1]\Gamma(\mathcal{E}^*) \to S^{+1}[1]\Gamma(\mathcal{E}^*)$, Then there is a unique bundle map $\sigma : \mathcal{E} \to T\mathcal{T}$ and skew-symmetric bilinear map $[.,.] : \Gamma\mathcal{E}\times\Gamma\mathcal{E} \to \Gamma\mathcal{E}$, satisfy the Lebniz rule. The Jacobi identity is satisifed if and only if $d_\mathcal{E}^2 = 0$.*

Proof.

$$\imath_{X_p}...\imath_{X_0}d_\mathcal{E}w =$$
$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+\sum_{k<i}|X_k|+|X_i|(\sum_{k>i}(|X_k|-1))}$$
$$\mathcal{L}_{\sigma(X_i)}\imath_{X_p}...\widehat{\imath_{X_i}}...\imath_{X_0}w$$

for $w \in \Gamma(\mathcal{E}^*)$ and $X_0, ..., X_p \in \Gamma(\mathcal{E})$. Then for $f \in C^\infty(\mathcal{T})$ and $w \in \Gamma(\mathcal{E}^*)$, we can uniquely define and $[.,.]$ by

$$\rho(X)f = \imath_X d_\mathcal{A} f = [\imath_X, d_\mathcal{A}]f$$

$$\imath_{[X,Y]}w = \rho(X)\imath_Y w - (-1)^{|X||Y|}\rho(Y)\imath_X w$$
$$-(-1)^{|X|(|Y|-1)}\imath_Y\imath_X d_\mathcal{A}w = [[\imath_X, d_\mathcal{A}], \imath_Y]w$$

proof of the last part is same as the proof of the theorem 2.4. □

Definition 2.6. *A generalized Lie group-$\mathcal{LA}$ groupoid or GLG- $\mathcal{LA}$Gd is a GLG-Gd in the category of GLG-Ad means GLG-Gds ($M \rightrightarrows A$, $G \rightrightarrows T$) such that M is GLG-Ad over G, A is GLG-Ad over T, and all of structure maps for the GLG-Gd structure of M are morphism over corresponding structure maps for G.*

Theorem 2.7. *Let ($M \rightrightarrows A$, $G \rightrightarrows T$) be a GLG-Gd. Then there is an induced GLG-Gd structure on $[j]M \rightrightarrows [j]A$.*

Theorem 2.8. *Let ($M \rightrightarrows A$, $G \rightrightarrows T$) be a generalized Lie group-$\mathcal{LA}$ groupoid.*
Then $[-1]_G M \rightrightarrows [-1]_T A$ is a generalized Lie group-Q groupoid.

Proof. We know the vector field on $[-1]M$ is the algebroid differential d_M. $\square$

References

[1] *J. O. Adeniran, J. T. Akinmoyewa, A. R. T. Solarin and T. G. Jaiyeola, On some algebraic properties of generalized groups. Octogon mathematical magazine. 17(1) (2009), 125-134.*

[2] *M. R. Farhangdoost, Fiber bundle and Lie algebras of top space. Bulletin of the Iranian mathematical society. 39(4) (2013), 589-598.*

[3] *K. C. H. Mackenzie, General theory of Lie groupoids and Lie algebroids. London Mathematical Society Lecture Note Series, 213, Cambridge, 2005.*

[4] *R. A. Mehta, Supergroupoids, double structures, and equivariant cohomology, Ph.D. Thesis. University of California, Berkeley, 2006.*

[5] *M. R. Molaei, Mathematical structures based on completely simple semigroups. Hadronic Press (Monograph in Mathematics), Palm Harbor, USA, 2005.*

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014

conformal isometric and causal embedding of Lorentzian manifolds

M. Vatandoost* Department of Mathematics and Computer Sciences,
Hakim Sabzevari University, m.vatandoost@hsu.ac.ir
R. Pourkhandani Department of Mathematics and Computer Sciences,
Hakim Sabzevari University, r.pourkhandani@hsu.ac.ir

Abstract: It is shown that Nash's theorem can be extended to indefinite metrics by Greene and Clarke. That is, any semi-Riemannian manifold can be smoothly isometrically embedded in any open subset of semi-Euclidean space R^N_s. The recent conclusion about conformal isometric embedding of Lorentzian manifold (M, g) in Minkowski space-time L^N is studied and compared with causal isomorphic embedding in L^N.
Keywords: Conformal isometric embedding, Lorentzian manifold, Causal isomorphic embedding.

1 INTRODUCTION

A celebrated theorem by J. Nash [9] states that any C^3 Riemannian manifold can be isometrically embedded in any open subset of some Euclidean space R^N for large N. Greene [4] and Clarke [2] showed independently that Nashs theorem can be extended to indefinite (even degenerate) metrics, that is, any semi-Riemannian manifold can be smoothly isometrically embedded in any open subset of semi-Euclidean space R^N_s for large enough dimension N and index s. Nevertheless, a new problem appears when a semi-Riemannian manifold of index s is going to be embedded in a semi-Euclidean space of the same index R^N_s. We will focus on the simplest case $s = 1$, i.e., the isometric embedding of a Lorentzian manifold (M, g) in Minkowski space-time L^N. Such an embedding will not exist in general; for example, the existence of a causal closed curve in M contradicts the possibility of an embedding in L^N. So, the first task is to characterize the class of isometrically embeddable space-times or conformally embeddable. For an immersion $i : M \to \overline{M}$ only injectivity of each di_p, $p \in M$ is required; the injectivity of i, as well as being a homeomorphism onto its image, are required additionally for i to be an embedding.

A space-time (M, g) is a connected C^∞ Hausdorff manifold of dimension two or greater which has a countable basis, a Lorentzian metric g of signature $(+, -, ..., -)$, and a time orientation (i.e. M admits a continuous timelike vector field).

We say that a vector $v \in T_pM$ is timelike if $g_p(v, v) > 0$, causal if $g_p(v, v) \geq 0$, null if $g_p(v, v) = 0$ and spacelike if $g_p(v, v) < 0$. A smooth curve is timelike (future pointing) if its tangent vector is everywhere timelike (future pointing), and similarly for causal, null, future or past pointing, or spacelike. If $p, q \in M$, then q is in the chronological future of p, written $q \in I^+(p)$, if there is a timelike future pointing curve $\gamma : [0, 1] \to M$ with

*Corresponding Author

$\gamma(0) = p$, and $\gamma(1) = q$; similarly, q is in the causal future of p, written $q \in J^+(p)$, if there is a future pointing causal curve from p to q. For any point, p, $I^+(p)$ is open; but $J^+(p)$ need not, in general, be closed. $J^+(p)$ is, however, always a subset of the closure of $I^+(p)$. To be more careful, it is useful to remind the following conditions.

1. A space-time M which has no point p with a non-degenerate causal curve which starts and ends at p is said to satisfy the causal condition.
2. If each point p has arbitrarily small neighborhoods which any causal curve intersects in a single component, M satisfies the condition of strong causality.
3. If M is strongly causal and $J^{\pm}(p)$ is the topological closure of $I^{\pm}(p)$ for every $p \in M$, then M is causally simple.
4. A space-time M is said to be globally hyperbolic if M is strongly causal and $J^+(p) \cap J^-(q)$ is compact for all p and q in M.

2 conformal isometry

This section is a review of some results on conformal isometry of Lorentzian manifolds by Muller and sanchez [8]. A time function t on a space-time is a continuous function which increases strictly on any future-directed causal curve. Recently [1], it has been proved that this is also equivalent to the existence of a temporal function, i.e., a smooth time function with everywhere past-directed timelike gradient ∇t. A temporal function will be called steep if $\nabla t > 1$; as we know, not all stably causal space-times admit a steep temporal function. A time or temporal function is called Cauchy if it is onto on R and all its level hypersurfaces are Cauchy hypersurfaces (i.e., topological hypersurfaces crossed exactly once by any inextensible timelike curve). A classical theorem by Geroch [3] asserts the equivalence between: (i) to be globally hyperbolic, (ii) to admit a Cauchy hypersurface, and (iii) to admit a Cauchy time function.

Proposition 2.1. *Let (M, g) be a space-time.If t is a temporal function then there exists a conformal metric $g^* = \Omega g$ such that t is steep.*

Proposition 2.2. *Let (M, g) be a Lorentzian manifold. If there exists a conformal immersion $i : M \to L^N$ then (M, g) is a stably causal space-time. Moreover, if i is a isometric immersion, then the natural time coordinate $t = x_0$ of L^N induces a steep temporal function on M.*

Example 2.3. *Let $M = (x, t) \in R^2 : x > 0, g = (dx^2 - dt^2)/x^2$. This is conformal to $R^+ \times R \subset L^2$ and, thus, causally simple. It is easy to check that $d(p, q) = \infty$ for $p, q = (\pm 1, 2)$ and (M, g) cannot be isometrically immersed in L^N.*

Proposition 2.4. *If a space-time (M, g) admits a steep temporal function t then it can be isometrically embedded in L^N for some N.*

on the other hand, Muller showed that any globally hyperbolic space-time admits a steep Cauchy temporal function.

Definition 2.5. *A bijective map $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ is called a smooth conformal isometry if f is a diffeomorphism and it satisfies $f^*\overline{g} = hg$ for some positive function h on M.*

Corollary 2.6. *(i) Any globally hyperbolic space-time can be isometrically embedded in some L^N.*
(ii) A Lorentzian manifold is a stably causal space-time if and only if it admits a conformal embedding in some L^N.

3 causal isomorphism

We define a bijective map $f : M \to \overline{M}$ to be a causal isomorphism when $p \preceq q$ if and only if $f(p) \preceq f(q)$ and to be a chronological isomorphism when $p \ll q$ if and only if $f(p) \ll f(q)$. However, when space-times are strongly causal, two relation are equivalent as the following kim's theorem states.

Theorem 3.1. *Let $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ be a bijection between two n-dimensional strongly causal space-times with $n > 2$. Then f is a chronological isomorphism if and only if f is a causal isomorphism.*

In 1976, Hawking, King and McCarthy [5] proposed a new topology on space-times and showed that any null geodesic preserving homeomorphism between strongly causal space-times is necessarily a smooth conformal isometry the proof of Hawkings theorem demands that the dimension of space-times must be greater than 2.

Theorem 3.2. *Let the dimensions of strongly causal space-times M and $\overline{M}$ be greater than 2. Then any causal isomorphism (or, equivalently chronological isomorphism) $f : M \to \overline{M}$ is a smooth conformal isometry.*

From the above theorem, we can see that a causal isomorphism is necessarily a diffeomorphism when the associated dimension is greater than or equal to 3. When dimension is 2, we can only say that any causal isomorphism is necessarily a homeomorphism. Kim [6] has introduced a new method for imbedding a Lorentzian manifold with a non-compact Cauchy hypersurface and has shown the following theorem.

Theorem 3.3. *Any two-dimensional globally hyperbolic space-time with a non-compact Cauchy hypersurface can be causally isomorphically imbedded into L^2.*

By Geroch's theorem any globally hyperbolic space-time M is homeomorphic to $R \times S$ where S is a Cauchy hypersurface. If M be two-dimensional space-time and S be a non-compact Cauchy hypersurface of M, then M is homeomorphic to $R \times R$ and so it is simply connected. In fact, two-dimensional globally hyperbolic space-time M is simply connected iff M has a non-compact Cauchy hypersurface.
On the other hand, we know[10] that any continuous n-sphere order representation of n-dimensional space-time M is a continuous order-embedding into L^n and so it is a causally isomorphically imbedding. As a result, we now give a generalization of Theorem 3.3.

Theorem 3.4. *Any simply connected and causally simple space-time can be causally isomorphically imbedded into L^2.*

4 Conclusion

Corollary 4.1. *If dimension of a space-time be greater than two, then any causal isomorphism into L^N is a conformal isometry.*

The inverse of the corollary 4.1 is not true. In [7] and [11] it is shown that any space-time admitting a continuous causal isomorphism must be conformally flat. Also, there are conformally flat globally hyperbolic examples that has does not admit any causal isomorphism into L^N.

Corollary 4.2. *Let M be a simply connected and causally simple two dimensional space-time then any smooth causal isomorphism into L^N is a conformal isometry and vice versa.*

References

[1] A.N. Bernal and M. Sanchez, "Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes," Commun. Math. Phys. **257**, 4350 (2005).

[2] C.J.S. Clarke, "On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds," Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **314**, 417428 (1970).

[3] R. Geroch, "Domain of dependence," J. Math. Phys. **11**, 437449 (1970).

[4] R.E. Greene, "Isometric embeddings of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds," Memoirs of the American Mathematical Society, No. 97 American Mathematical Society, Providence, R.I. 63 (1970).

[5] S. W. Hawking, A. R. King and P. J. McCarthy, "A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential and conformal structures," J. Math. Phys, **17**, 174-181 (1976).

[6] D. H. Kim, "An imbedding of Lorentzian manifolds," Class. Quantum Grav, **26**, 075004 (2009).

[7] R. J. Low, "Continuous causal representation of space-time via sphere orderings," J. Math. Phys, **41**, 6525-6528 (2000).

[8] O. Muller, M. Sanchez, "Lorentzian manifolds isometrically embeddable in LN," Trans. Amer. Math. Soc., **363**, 5367-5379 (2011).

[9] J. Nash, "The imbedding problem for Riemannian manifolds," Ann. of Math, **63**, 2063 (1956).

[10] M. Vatandoost and Y. Bahrampour, "Sphere orderings representation of space-time," J. Math. Phys, **52**, 112503 (2011).

[11] M. Vatandoost and Y. Bahrampour, "Some necessary and sufficient conditions for admitting a continuous sphere order representation of two-dimensional space-times," J. Math. Phys, **53**, 122501 (2012).